MÉTAPHYSIQUE

DES QUANTITÉS POSITIVES ET NÉGATIVES.

Cet ouvrage se trouve à Paris, chez Mr. Bachelier, quai des Augustins, n°. 55, et à Francfort S. M., chez Mr. Jæger, avec les ouvrages suivans du même auteur.

Arithmétique d'Emile, 3e. édit., 1 vol. in-8, 1823.
Elémens de géométrie, 2e. édit., 1 vol. in-8, 1816.
Le même ouvrage en allemand, Stuttgart, 1818.
Application de l'algèbre à la géométrie, 2e. édition, 1 vol. in-4, 1824.

NB. Le traité analytique de la méthode, la Physique d'Emile, et l'Algèbre d'Emile, ne se trouvent plus dans la librairie.

MÉTAPHYSIQUE
DES QUANTITÉS POSITIVES
ET
NÉGATIVES,
OU INTRODUCTION A L'ALGÈBRE;

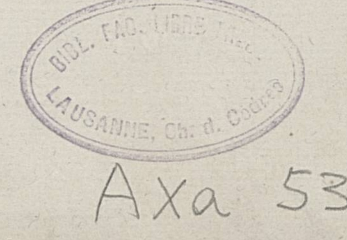
PAR EMANUEL DEVELEY,

Professeur de mathématiques; membre correspondant de l'Académie impériale des sciences de St Pétersbourg, des Académies royales de Harlem et de Jena, des sociétés de Montauban, de Bordeaux, de Lyon, de Besançon, de la Société économique de Saxe, et de la Société helvétique des sciences naturelles.

SECONDE ÉDITION.

GENÈVE,
Chez J. J. PASCHOUD, Imprimeur-Libraire;
ET A PARIS,
Même maison de commerce, rue de Seine, N°. 48, Faubourg St. Germain.

1824.



PRÉFACE.

C'est cet ouvrage que j'avais publié en 1799 sous le titre suivant: *Introduction à l'algèbre, contenant entr'autres une Arithmétique des quantités directes ou positives et des quantités inverses ou négatives.* J'en remis un exemplaire à Carnot lorsqu'il passait à Lausanne avec le premier consul Bonaparte, en 1800, pour aller à Marengo par le St. Bernard; il en lut le titre et me dit: *voilà qui doit être bien intéressant; c'est plus difficile que les principes du calcul différentiel; je vais m'occuper de cela dans ma chaise de poste; il paraît que nous aimons tous deux la métaphysique de la science.*

A peu près un an après, en 1801, parut l'ouvrage de Carnot intitulé: *De la corrélation des figures de géométrie;* dans lequel il adoptait les expressions de quantités directes et inverses, sans

dire un mot de moi. Je crus donc devoir insérer, en 1802, une espèce de réclamation bien modérée dans la seconde édition de mon Arithmétique d'Emile, en disant: *A la suite de cette arithmétique vient naturellement se placer* l'Introduction à l'Algèbre, *que j'ai publiée en* 1799.—*J'avais proposé dans cet écrit d'appeler* quantités directes *les quantités positives*, et quantités inverses *les quantités négatives. Le célèbre* CARNOT *emploie ces mêmes dénominations dans son traité* De la corrélation des figures de géométrie, *ouvrage extrêmement intéressant, qui a paru en* 1801. *Mais il y distingue les véritables* quantités, *qui sont absolues, directes, ou inverses, des* valeurs *ou formules algébriques, qu'il continue de nommer* positives, négatives. — *La satisfaction que m'a procurée cette espèce d'accord entre les idées du citoyen Carnot et les miennes, a été d'autant plus grande que j'ai plus ad-*

miré ses talens et l'intérêt qu'il sait répandre sur tout ce qu'il écrit, et que son amabilité m'a touché davantage quand j'ai eu le plaisir de le voir à son passage à Lausanne.

Enfin, dans la même année 1802, parut la *Géométrie de position*, du savant auteur cité, où l'on trouve cette phrase *(page xxiij). Le citoyen de Velay professeur de mathématiques à Lausanne, dans son* Introduction à l'algébre, *publiée en* 1799, *s'était déjà servi des dénominations de quantités* directes et inverses. *Je l'ignorais lorsque je m'arrêtai à ces mêmes dénominations dans mon traité de la corrélation des figures. Cette rencontre singulière, dont je suis flatté, prouve que ces expressions se présentent comme d'elles-mêmes dans la question dont il s'agit. Au surplus la théorie du citoyen de Velay et la mienne n'ont absolument rien de commun que ces dénominations, qui même ne sont*

pas tout-à-fait prises dans la même acception par lui et par moi.

Du reste, ceux qui ne seront pas mécontens de ma théorie, qui voudront la connaître mieux encore, et la comparer à celle de Carnot, pour voir si elle en diffère autant qu'il l'assure, ceux-là, dis-je, feront bien de lire, dans *l'Algèbre d'Emile*, le Chapitre intitulé: *Naissance des quantités directes et des quantités inverses*, et les six premières pages des *opérations sur les quantités simples et monogrammes*. Ils feront bien de lire ensuite, dans mon *Application de l'Algèbre à la Géométrie*, le Chapitre III de la première partie, et la *Digression sur le sens du signe — dans quelques formules*, digression qui termine le Chapitre IX de la seconde partie.

INTRODUCTION A L'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

Des quantités Directes ou positives, et des quantités Inverses ou négatives.

§. 1. JE suppose que le lecteur possède l'arithmétique, et qu'il connaît la signification et l'usage ordinaire des signes + *plus*, — *moins*, × *multiplié par*, : *divisé par*, = *égale.*

Je rappellerai cependant que ces signes, placés entre deux quantités, désignent, communément, le premier l'addition de ces quantités, le second leur soustraction, le troisième leur multiplication, le quatrième leur division, et le cinquième leur égalité.

§. 2. Cela posé, j'imagine qu'on nous demande de résoudre cette question bien simple:

Combien 25 *mètres et* 3 *décamètres font-ils de mètres ?*

En nous rappelant que le décamètre vaut dix mètres, nous verrons que 3 décamètres valent 30 mètres, et nous dirons :

$$25 + 30 = 55.$$

C'est-à-dire que la réponse à notre question sera : 55 mètres.

§. 3. Mais, en y faisant attention, on observera que nous n'aurons point, dans le vrai, ajouté ainsi des décamètres, considérés comme tels, avec des mètres ; parce qu'on ne saurait additionner des quantités qui ne sont point semblables.

Qu'avons-nous donc fait ? Nous avons réduit les décamètres en mètres, pour n'avoir plus que des quantités homogènes et susceptibles d'être ajoutées les unes avec les autres.

§. 4. De même, si l'on nous demande ceci : *Combien* 125 *centimes moins* 12 *décimes font-elles de centimes ?* En nous rappelant

que la décime vaut dix centimes, nous verrons que 12 décimes valent 120 centimes, et nous dirons :

$$125 - 120 = 5.$$

C'est-à-dire que la réponse à notre seconde question sera : 5 centimes.

§. 5. Mais, nous n'aurons point, dans le vrai, soustrait ainsi des décimes, considérées comme telles, de centimes; parce que des décimes ne peuvent être contenues, comme décimes, dans des centimes, et qu'on ne saurait retrancher d'une chose ce qu'elle ne renferme pas.

Qu'avons-nous donc fait? Nous avons réduit les décimes en centimes, pour n'avoir plus que des quantités homogènes et susceptibles d'être soustraites les unes des autres.

§. 6. Maintenant, s'il s'agit de déterminer et de représenter l'état de la fortune d'un homme qui a vingt mille francs dans sa

caisse, et qui a cinq mille francs de dettes, nous écrirons :

$$20000 - 5000 = 15000.$$

C'est-à-dire que nous déduirons 5000 francs de 20000 francs, pour avoir le reste 15000 francs. Et cette formule servira ainsi à déterminer l'état de la fortune en question, et représentera, en quelque sorte, cet état.

§. 7. Cependant, nous n'aurons point, dans le vrai, soustrait ainsi une somme de dettes d'une somme de biens ; parce que des dettes, considérées comme telles, ne peuvent être contenues dans des biens, et qu'on ne saurait retrancher d'une chose ce qu'elle ne renferme pas.

Mais, nous avons considéré le moment où le possesseur des 20000 francs en sortirait 5000 de sa caisse, pour acquitter ses dettes ; et nous avons vu que son fonds se réduirait alors à 15000 francs.

Or, il est clair que, dans ce cas, c'est

5000 francs de biens qui sont soustraits de 20000 francs de biens. Et voilà ce que notre formule représente.

§. 8. De même, s'il s'agit de déterminer et de représenter la quantité des dettes d'un homme qui devait hier 20000 francs, et qui vient de livrer aujourd'hui 5000 francs d'argent comptant à ses créanciers, en déduction de sa dette, nous écrirons encore :

$$20000 - 5000 = 15000.$$

C'est-à-dire que nous déduirons 5000 francs de 20000 francs, pour avoir le reste 15000 francs. Et cette formule servira ainsi à déterminer la quantité des dettes en question, et représentera cette quantité.

§. 9. Cependant, nous n'aurons point, dans le vrai, retranché ainsi une somme d'argent comptant d'une quantité de dettes; parce que de l'argent comptant ne peut être contenu dans des dettes, considérées comme telles, et qu'on ne saurait retrancher d'une chose ce qu'elle ne renferme pas.

Mais, nous avons considéré le moment où le débiteur des 20000 francs, en payant 5000 francs d'argent comptant, avait ainsi diminué sa dette de toute cette quantité, et l'avait réduite à 15000 francs.

Or, il est clair que, dans ce cas, c'est 5000 francs de dettes qui sont soustraits de 20000 francs de dettes. Et voilà ce que notre seconde formule représente.

§. 10. Cela posé, reprenons nos questions. La première était celle-ci : *Combien 25 mètres et 3 décamètres font-ils de mètres ?* (§. 2.)

Pour la résoudre, nous l'avons, en quelque sorte, traduite ainsi : *Combien 25 mètres et 30 mètres font-ils de mètres ?* (§. 2 et 3.)

C'est-à-dire que la question proposée nous obligeant à indiquer des *mètres*, nous avons réduit en mètres toutes les quantités qui devaient entrer dans notre calcul.

§. 11. Notre seconde question était celle-ci : *Combien 125 centimes moins 12 décimes font-elles de centimes ?* (§. 4.)

Pour la résoudre, nous l'avons, en quelque sorte, traduite ainsi : *Combien 125 centimes moins 120 centimes font-elles de centimes?* (§. 4 et 5.)

C'est-à-dire que la question proposée nous obligeant à indiquer des *centimes*, nous avons réduit en centimes toutes les quantités qui devaient entrer dans notre calcul.

§. 12. Notre troisième question était celle-ci : *Quel est le bien d'un homme qui a* 20000 *francs dans sa caisse, et qui a* 5000 *francs de dettes?* (§. 6.)

Pour la résoudre, nous l'avons, en quelque sorte, traduite ainsi : *Quel est le bien d'un homme qui a* 20000 *francs de biens moins* 5000 *francs de biens?* (§. 6 et 7.)

C'est-à-dire que la question proposée nous obligeant à indiquer *un bien*, nous avons réduit en biens toutes les quantités qui devaient entrer dans notre calcul.

§. 13. Enfin, notre dernière question était celle-ci : *A quoi montent les dettes d'un homme qui, devant hier* 20000 *francs, vient d'en*

payer aujourd'hui 5000 en argent comptant? (§. 8.)

Pour la résoudre, nous l'avons, en quelque sorte, traduite ainsi : *A quoi montent les dettes d'un homme qui a 20000 francs de dettes moins 5000 francs de dettes?* (§. 8 et 9.)

C'est-à-dire que la question proposée nous obligeant à indiquer *une dette*, nous avons réduit en dettes toutes les quantités qui devaient entrer dans notre calcul.

§. 14. Et comme il serait facile de raisonner ainsi sur toute autre question, il en résulte, en général :

1°. Que plusieurs quantités ne peuvent point entrer dans une même opération de calcul si elles ne sont point semblables et homogènes ; si elles ne sont point composées des mêmes élémens ; si leurs unités ne sont pas les mêmes. (§. 3. 5. 7. 9.) Cela est sensible pour l'addition et la soustraction ; et l'on sait que toutes les opérations d'arithmétique reviennent à ces deux-là.

2°. Que si une question présente des

quantités hétérogènes à faire entrer dans une même opération de calcul, on traduit cette question dans une autre question qui ait le même sens que la première, et qui ne présente plus que des quantités homogènes. Cette espèce de traduction est souvent tacite, et se fait même quelquefois sans que l'on s'en doute. (§. 10. 11. 12. 13.)

3°. Que la réduction des unités d'une espèce en unités d'une autre espèce se fait toujours dans le sens des UNITÉS PRINCIPALES; c'est-à-dire, de celles qui doivent servir de réponse à la question. Ainsi, si l'on demande des mètres, on réduit tout en mètres, (§. 10.), si l'on demande des centimes, on réduit tout en centimes, (§. 11.), si l'on demande des biens, on réduit tout en biens, (§. 12), si l'on demande des dettes, on réduit tout en dettes, (§. 13.), etc., etc.

§. 15. Il y a cependant une différence essentielle entre ces réductions; car, si l'on a réduit des décamètres en mètres, ou des décimes en centimes, etc., on peut dire qu'il

y a égalité entre la quantité concrète proposée et la quantité concrète dans laquelle on l'a réduite. Ainsi :

3	décamètres	=	30 mètres,
12	décimes	=	120 centimes,
	etc., etc.		

Mais, si l'on a réduit, pour me servir de cette expression, des dettes en biens, (§. 12.), ou des biens en dettes, (§. 13.), on ne peut plus dire qu'il y ait égalité entre la quantité concrète proposée, et la quantité concrète dans laquelle on l'a réduite. Ainsi, il n'y a pas égalité entre 5000 francs de dettes, comme dettes, et 5000 francs de biens, comme biens. Bien plus, quelque somme de de dettes et quelque somme de biens que l'on prenne, il ne pourra jamais y avoir égalité entre ces quantités concrètes ; tant qu'elles seront ainsi représentées.

§. 16. Donc, pour résoudre nos deux dernières questions, (§. 6 et 8.), nous n'avons point mis à la place des quantités qui

nous étaient proposées d'autres quantités qui leur fussent égales ; mais bien plutôt des quantités qui leur étaient contraires et opposées. (§. 7 et 9.) Aussi ces substitutions n'ont-elles pu se faire qu'à la faveur d'une espèce de redressement ou de rectification de la question qu'il fallait résoudre. Quelques réflexions pourront éclaircir encore mieux cette matière.

§. 17. Quand on nous propose d'ajouter des décamètres avec des mètres, ou des décimes avec des centimes, la substitution que nous faisons ne change point l'opération, qui reste toujours une addition.

Mais quand on nous demande quelle est la fortune d'un homme qui *a* 20000 francs d'argent, et qui *a* 5000 francs de dettes, (§. 6.), cette question, qui semblerait indiquer une addition, à cause du verbe *avoir*, mis au devant des deux quantités, ne peut cependant se résoudre que par une soustraction ; ensorte qu'on ne peut point, à proprement parler, ajouter des dettes avec des biens, ou des biens avec des dettes.

Avoir des biens, c'est vraiment posséder ; comme le fait entendre le mot *avoir*. En échange, *avoir des dettes*, c'est le contraire de posséder ; et le mot *avoir* se trouve là très-mal placé.

Tout ce que l'on *a* véritablement, ou tout ce que l'on posséde, doit pouvoir s'additionner, pour faire une *somme*. Ainsi, demander la fortune d'un homme qui *a* des biens et qui *a* des dettes, c'est, en quelque sorte, demander d'ajouter des biens avec des dettes. Le calculateur rectifie ou redresse la question ; et la prétendue addition devient une soustraction.

§. 18. Nous voyons donc, d'abord, qu'il existe des quantités qui, n'étant point contraires ou opposées, peuvent être prises les unes pour les autres, indépendamment même de toute question relative à ces quantités. Nous en avons des exemples dans les décimes et les centimes, dans les décamètres et les mètres, etc. (§. 15.)

§. 19. Nous voyons, ensuite, qu'il existe

des quantités qui, étant contraires ou opposées, ne pourraient, sans quelque artifice particulier, être prises les unes pour les autres; à moins que ce ne fut pour résoudre certaines questions, susceptibles d'un redressement, ou d'une rectification. Nous en avons des exemples dans les biens et les dettes, etc. (§. 15 et 16)

§. 20. Cela posé, quand il s'agira, dans une question, de déterminer des *biens*, et que les biens seront, par conséquent, les *unités principales*, (§. 14. 3°.), cette espèce de quantité, se trouvant alors *directement* dans le sens indiqué par la question, nous pourrons lui donner le nom de QUANTITÉ DIRECTE; et, en échange, désigner alors les dettes sous le nom de QUANTITÉS INVERSES.

De même, quand dans une question les *unités principales* seront des *dettes*, ces quantités prendront, dans ce moment-là, le nom de *quantités directes*, et les biens, en échange, celui de *quantités inverses*.

§. 21. En général : *Les* QUANTITÉS DIRECTES *seront les quantités prises dans le sens indiqué ; et les* QUANTITÉS INVERSES *seront les quantités prises dans le sens contraire au sens indiqué.*

§. 22. Ainsi, quand il s'agira d'une distance vers l'Orient, toute distance vers l'Orient sera une quantité directe ; et toute distance vers l'Occident sera une quantité inverse.

En échange, quand il s'agira d'une distance vers l'Occident, toute distance vers l'Occident sera une quantité directe ; et toute distance vers l'Orient sera une quantité inverse.

Quand il s'agira des élévations du soleil au dessus de l'horizon, ces élévations seront les quantités directes ; et les abaissemens du soleil au dessous de l'horizon seront les quantités inverses.

En échange, quand il s'agira d'abaissemens au dessous de l'horizon, ces abaissemens seront les quantités directes ; et les élévations

au dessus de l'horizon seront les quantités inverses.

Quand il s'agira d'un gain, les gains seront les quantités directes; et les pertes seront les quantités inverses.

En échange, quand il s'agira d'une perte, les pertes seront les quantités directes; et les gains seront les quantités inverses.

Quand il s'agira d'un mouvement accéléré, tout mouvement de cette espèce sera une quantité directe; et tout mouvement retardé sera une quantité inverse.

En échange, quand il s'agira d'un mouvement retardé, tout mouvement de cette espèce sera une quantité directe; et tout mouvement accéléré sera une quantité inverse, ect. ect.

§. 23. Quant aux quantités abstraites, nous verrons bientôt s'il est possible de leur appliquer ces principes; et si l'on peut aussi les considérer sous le point de vue de quantités directes et inverses.

§. 24. Maintenant, si l'on nous fait cette question: *A quelle distance vers l'Orient est*

placé un point qui est à 5 mètres vers l'Orient, et, de plus, à 2 mètres de ce même côté ? Nous répondrons que ce point est à 7 mètres de distance vers l'Orient. Et nous conclurrons de là que la combinaison de la quantité directe 5 (§. 22.) avec la quantité directe 2 est une addition.

§. 25. Si l'on nous fait ensuite cette seconde question : *A quelle distance vers l'Orient est placé un point qui est à 5 mètres vers l'Occident, et, de plus, à 2 mètres de ce même côté ?* Nous répondrons que la question a été mal posée, et nous la rectifierons, en la traduisant ainsi : *A quelle distance vers l'Occident est placé un point qui est à 5 mètres vers l'Occident, et, de plus, à 2 mètres de ce même côté ?*

Alors, nous dirons que le point dont il s'agit, est à 7 mètres de distance vers l'Occident. Et nous conclurrons de là que la combinaison de la quantité directe 5, de la question rectifiée, avec la quantité directe 2, (§. 22.), est une addition.

§. 26. Et comme nous verrons facilement

qu'il

qu'il en serait de même de tout autre exemple, nous dirons, en général, que *la combinaison d'une quantité directe avec une quantité directe est une addition.* (§. 24. 25.)

§. 27. En échange, si l'on nous fait cette question : *A quelle distance vers l'Occident est placé un point qui est à 7 mètres vers l'Occident, et, en même tems, à 7 mètres vers l'Orient ?*

Nous observerons d'abord, que cette question semble poser en fait une chose impossible, c'est qu'un seul et même point puisse occuper à la fois deux places différentes. Mais, en y réfléchissant, nous comprendrons que ce n'est pas là ce qu'on a voulu dire, et qu'on a simplement demandé d'indiquer à quoi se réduisait, au vrai, une pareille supposition. Alors nous répondrons que le point dont il s'agit ne peut être ni vers l'Occident, ni vers l'Orient; la distance qu'on nous demande vers l'Occident étant tout-à-fait détruite, dans cette hypothèse, par la distance égale vers l'Orient; et se trouvant ainsi nulle ou zéro. Et nous

conclurrons de là que la combinaison de la quantité inverse 7 (vers l'Orient) (§. 22.) avec la quantité directe 7 (vers l'Occident) est une soustraction ; la quantité inverse ayant, dans ce cas, tout-à-fait détruit la quantité directe.

§. 28. Si l'on nous fait ensuite cette seconde question : *A quelle distance vers l'Orient est placé un point qui est à 7 mètres vers l'Orient, et, en même tems, à 5 mètres vers l'Occident?* Nous répondrons (§. 27.) qu'il est à 2 mètres de distance vers l'Orient. Et nous conclurrons de là que la combinaison de la quantité inverse 5 avec la quantité directe 7 est une soustraction ; la quantité inverse, plus petite, ayant, dans ce cas, détruit en partie la quantité directe plus grande.

§. 29. Enfin, si l'on nous fait cette troisième question : *A quelle distance vers l'Orient est placé un point qui est à 6 mètres vers l'Orient, et, en même tems, à 10 mètres vers l'Occident?* Nous répondrons que la question a été mal posée ; et nous la rectifierons, en la traduisant ainsi : *A quelle distance vers l'Oc-*

cident est placé un point qui est à 10 *mètres vers l'Occident*, *et*, *en même tems*, *à* 6 *mètres vers l'Orient ?*

Alors, nous dirons (§. 27.) que le point dont il s'agit, est à 4 mètres de distance vers l'Occident. Et nous conclurrons de là que la combinaison de la quantité inverse 6, de la question rectifiée, avec la quantité directe 10, de la même question, (§. 22.), est une soustraction ; la quantité inverse, plus petite, ayant, dans ce cas, détruit en partie la quantité directe plus grande.

§. 30. Et comme nous verrons facilement que tout autre exemple, analogue à ceux des §. 27, 28 et 29, nous donnerait le même résultat, nous dirons, en général, que *la combinaison d'une quantité inverse avec une quantité directe*, *égale ou plus grande*, *est une soustraction*, *opérée par la quantité inverse.*

Ainsi donc, au lieu de dire que *l'on ajoute une quantité inverse avec une quantité directe*, *égale ou plus grande*, il faudrait dire, en d'autres termes, et d'une manière plus exacte, que

l'on soustrait une quantité directe d'une autre quantité directe, égale ou plus grande. (§. 17.)

§. 31. Le direct augmentant donc le direct, (§. 26.), auquel on rapportait tout, et l'inverse, en échange, diminuant le direct, (§. 30.), on en a conclu que les mêmes signes qui servaient à indiquer l'addition et la soustraction des quantités en général, pourraient être employés à représenter l'état et la manière d'être des quantités considérées comme directes et inverses. On a, en conséquence, affecté le signe + aux premières, et le signe — aux secondes.

Ainsi, l'on a dit, par exemple, que cette expression : + 5 *francs de biens*, pourrait représenter la quantité 5 francs, prise directement dans le sens indiqué par le mot *de biens*, (§. 21.); et que cette autre expression : — 5 *francs de biens*, pourrait représenter la quantité 5 francs, prise à l'inverse du sens indiqué par le mot *de biens ;* c'est-à-dire, prise dans le sens des dettes. Et ainsi des autres quantités.

§. 32. Alors, considérant le signe + comme affirmant que la quantité était prise dans le sens indiqué, et le signe — comme niant que la quantité fut prise dans le sens indiqué, on a nommé les quantités directes POSITIVES, et les quantités inverses NÉGATIVES. Mais il paraît que, dans cette acception, on aurait dû nommer les premières *affirmatives*.

Quoiqu'il en soit, les dénominations que je viens d'indiquer sont reçues et employées par tous les auteurs; et, par conséquent, il faut les connaître.

§. 33. D'après tout ce que nous avons dit, on voit que les quantités directes et inverses sont des quantités tout aussi réelles les unes que les autres; et que, sous ce point de vue, elles sont les unes et les autres positives; du moins dans le sens que l'on attache communément à ce mot.

Il est si vrai que ces quantités sont aussi réelles les unes que les autres, que les directes peuvent devenir inverses, et les inverses

directes, suivant l'état de la question. (§. 21. 22.)

Les quantités inverses ne sont donc point au dessous de zéro et moins que rien, comme on l'a prétendu. Il n'est pas besoin de les envisager ainsi, pour expliquer l'effet qu'elles produisent sur les quantités directes. D'ailleurs, il ne peut rien y avoir au dessous de zéro; et, pour parler exactement, *moins que rien* n'est rien, et ne peut pas être soumis au calcul.

§. 34. Les quantités directes et inverses, quand elles sont considérées seules, d'une manière isolée, et sans les soumettre pour le moment au calcul, doivent pourtant, en général, être précédées de leurs signes; afin de ne pas donner lieu aux équivoques.

Ainsi, l'on doit écrire: + 5 *de biens*, ou — 5 *de biens*, suivant que la quantité 5 *de biens* est directe ou inverse.

Cependant, quand une quantité, considérée RÉLATIVEMENT à sa direction, n'a point de signe, on lui suppose naturellement le signe

+. Ainsi, l'expression : 5 *de biens* est naturellement prise pour + 5 *de biens*. Et c'est ce dont il faut être averti.

§. 35. Répétons d'ailleurs ceci : c'est que les signes + et — ont un usage double.

1°. Ces signes peuvent indiquer l'addition et la soustraction ; mais, dans ce cas, ils ne sont jamais placés qu'entre deux quantités dont il faut trouver la somme ou la différence.

2°. Ils peuvent aussi servir à désigner les quantités directes et inverses, et alors on les rencontre souvent au devant de quantités isolées, que l'on considère seules, sans les soumettre pour le moment au calcul.

§. 36. Ce n'est pas tout ; si des quantités concrètes on passe aux quantités abstraites, comme il n'est alors plus question de biens, de dettes, d'orient, d'occident, etc., le sens, qu'on suppose indiqué, reste indéterminé.

Dans ce cas, l'expression + 5 désigne que la quantité 5 est prise dans le sens direct,

quel qu'il soit ; et l'expression — 5 désigne que la quantité 5 est prise dans le sens inverse du sens direct, quel que soit ce dernier. (§. 21. 23.)

§, 37. En conséquence, les quantités abstraites, qu'elles soient isolées ou non, sont toutes considérées comme directes ou inverses : toutes celles qui n'ont point de signe, ou qui sont précédées du signe +, sont envisagées comme directes ; et toutes celles qui ont le signe — sont envisagées comme inverses. Et il n'y a point d'inconvénient à généraliser ainsi la chose ; puisque la combinaison du direct avec le direct est une addition, (§. 26.) ; tandis que la combinaison de l'inverse avec le direct est une soustraction. (§. 30.)

§. 38. Tout cela posé, il est bien clair que + 5, nombre abstrait, ne peut pas, comme direct, être égal à — 5, aussi nombre abstrait, mais inverse ; puis que ce sont là deux quantités opposées, qui, étant mêlées, se détruisent l'une l'autre.

Mais, si l'on a — 5 *de biens*, c'est alors la quantité 5 prise dans le sens inverse des biens; c'est-à-dire, prise dans le sens direct des dettes, (§. 31.); et, par conséquent, l'on peut dire que

$$-5 \text{ de biens} = +5 \text{ de dettes.}$$

De même, — 5 *de dettes*, c'est la quantité 5 prise dans le sens inverse des dettes; c'est-à-dire, prise dans le sens direct des biens; et, par conséquent, l'on peut dire que

$$-5 \text{ de dettes} = +5 \text{ de biens.}$$

Il serait bon de s'exercer à quelques substitutions semblables.

CHAPITRE II.

Des quantités directo-directes, directo-inverses, inverso-directes et inverso-inverses.

§. 39. CONNAISSANT bien la valeur des expressions *isolées* + 8 et — 5, nous pourrons, si nous le voulons, considérer les signes de ces quantités comme étant, en quelque sorte, inséparables des quantités elles-mêmes; et ces deux choses se confondant, pour ne former ensemble qu'un seul et unique sens. Et, en partant de là, nous pourrons prendre encore ces quantités, (réunies avec leurs premiers signes), soit directement, soit inversément. C'est ce qu'il s'agit d'effectuer.

Ayant donc, je le répéte, les quantités + 8 et — 5, l'une directe, et l'autre inverse, je demande de les prendre encore l'une et l'autre, d'abord directement; c'est-à-dire, dans le sens qu'elles ont avec leurs signes; et ensuite inversément, c'est-à-dire, dans le

sens contraire à celui qu'elles ont avec leurs signes.

§. 40. La quantité directe + 8, prise directement, c'est-à-dire, prise dans le sens qu'elle a avec son signe, (§. 39.), reste évidemment directe, et se trouve encore + 8.

J'exprimerai cela ainsi : + + 8 = + 8.

La quantité inverse — 5, je ne dis point rendue directe, mais prise directement; c'est-à-dire, prise dans le sens qu'elle a avec son signe, (§. 39), reste, sans contredit, inverse; et se trouve encore — 5.

J'exprimerai cela ainsi : + — 5 = — 5.

Maintenant, la quantité directe + 8, prise inversément; c'est-à-dire, prise dans le sens contraire à celui qu'elle a avec son signe, (§. 39.), devient, sans contredit, inverse, et se trouve alors — 8.

J'exprimerai cela ainsi : — + 8 = — 8.

Enfin, la quantité inverse — 5, je ne dis point laissée inverse, mais prise inversément; c'est-à-dire, prise dans le sens contraire à celui

qu'elle a avec son signe, (§. 39.), devient, sans contredit, directe, et se trouve alors + 5.

J'exprimerai cela ainsi : — — 5 = + 5. (Lisez : *l'inverse de* — 5 = + 5.)

§. 41. Généralisant cela, nous obtiendrons les résultats suivans :

1°. LE DIRECT, PRIS DIRECTEMENT, *c'est le direct pris dans le sens même du direct; et qui* RESTE, *par conséquent*, DIRECT.

J'exprimerai cela ainsi : + + = +.

Et j'appellerai cette quantité : DIRECTO-DIRECTE.

2°. L'INVERSE, PRIS DIRECTEMENT, *ce n'est pas l'inverse devenu direct, mais c'est l'inverse pris dans le sens même de l'inverse; et qui* RESTE, *par conséquent*, INVERSE.

J'exprimerai cela ainsi : + — = —.

Et j'appellerai cette quantité : DIRECTO-INVERSE.

3°. LE DIRECT, PRIS INVERSÉMENT, *c'est le direct pris dans le sens contraire du direct; et qui* DEVIENT, *par conséquent*, INVERSE.

J'exprimerai cela ainsi : — + = —.

Et j'appellerai cette quantité : INVERSO-DIRECTE.

4°. L'INVERSE, PRIS INVERSÉMENT, *ce n'est pas l'inverse laissé inverse, mais c'est l'inverse pris dans le sens contraire de l'inverse, et qui* DEVIENT, *par conséquent*, DIRECT.

J'exprimerai cela ainsi : — — = + (1).

Et j'appellerai cette quantité : INVERSO-INVERSE.

§. 42. Après avoir formé ainsi un second ordre de quantités directes et inverses, il est clair qn'on en pourrait former un troisième, un quatrième, etc. Mais toutes les espèces de quantités qui en résulteraient, se réduisant toujours, en dernière analyse, aux quantités directes et inverses (2), nous ne croyons

---

(1) Au lieu de lire : *moins moins égale plus*, lisez plutôt : *l'inverse de l'inverse est direct ;* c'est le véritable sens de cette formule.

(2) La quantité directo-directe et la quantité inverso-inverse reviennent toutes deux, comme on a pu le voir, (§. 41.), à la quantité directe ; tandis que la directo-inverse et l'inverso-directe reviennent à l'inverse. Il en serait de même dans les ordres plus avancés.

pas devoir pousser plus loin cet examen.

Cependant, nous pensons que ce que nous avons dit sur ce sujet pourra nous être fort utile pour la suite; et que nous ne pouvions même nous dispenser d'entrer dans ce détail. Nous allons maintenant passer aux opérations sur les quantités directes et inverses.

CHAPITRE III.

De l'addition et de la soustraction des quantités directes et inverses.

§. 43. Nous avons déja observé qu'un certain nombre de problèmes, qui paraissaient indiquer et demander des additions, ne pouvaient cependant se résoudre que par des soustractions. (§. 17. 27. 28. 29.)

Le contraire a lieu aussi. Mais avant de nous occuper de ces sortes de questions, nous allons parler de celles qu'on peut prendre à la lettre; et qui n'ont aucun besoin d'être redressées ou rectifiées.

Addition effective.

§. 44. On ne peut vraiment ajouter, comme nous le savons, (§. 14. 1°.), que des quantités homogènes et semblables.

Ainsi, quand il s'agit de quantités directes et inverses, on ne peut ajouter que le direct avec le direct, et l'inverse avec l'inverse.

§. 45. Cela posé, ajoutons d'abord une quantité directe avec une autre quantité directe plus grande ou plus petite que la première.

Ajoutons, par exemple, $+ 2$ avec $+ 3$, ou $+ 3$ avec $+ 2$.

Ce sera ajouter 2 direct avec 3 direct, ou 3 direct avec 2 direct, pour avoir 5 direct, ou $+ 5$.

Pour représenter ces deux cas, nous écrirons: $+ 3 + + 2$ et $+ 2 + + 3$; le signe $+$ du milieu étant ici le signe de l'opération, ou de l'addition, et les deux autres marquant que les quantités 2 et 3 sont directes.

Or, le résultat de ces deux additions devant manifestement être $+ 5$, comme nous venons de le dire, nous aurons:

$$+ 3 + + 2 = + 5.$$
$$+ 2 + + 3 = + 5.$$

§. 46. Mais il est bien clair qu'on aurait obtenu le même résultat, en considérant les

expressions $+3++2$ et $+2++3$, comme indiquant la combinaison d'une quantité directe, *prise directement*, (§. 41. 1°.), avec une autre quantité directe; et en écrivant, d'une manière abrégée:

$$+3+2=+5.$$
$$+2+3=+5.$$

§. 47. Or, comme nous aurions opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres directs quelconques, entiers ou fractionnaires, il en résulte que *pour additionner deux quantités directes, il suffit de les écrire l'une à la suite de l'autre avec leurs signes; et de les réduire alors à la plus simple expression.*

§. 48. Ajoutons à présent une quantité inverse avec une autre quantité inverse plus grande ou plus petite que la première.

Ajoutons, par exemple, — 2 avec — 3, ou — 3 avec — 2.

Ce sera ajouter 2 inverse avec 3 inverse,

ou 3 inverse avec 2 inverse, pour avoir 5 inverse, ou — 5.

Pour représenter ces deux cas, nous écrirons : — 3 + — 2 et — 2 + — 3 ; le signe + du milieu étant ici le signe de l'opération, ou de l'addition, et les deux autres signes — marquant que les quantité 3 et 2 sont inverses.

Or, le résultat de ces deux additions devant manifestement être — 5, comme nous venons de le dire, nous aurons :

$$-3 + -2 = -5.$$
$$-2 + -3 = -5.$$

§. 49. Mais il est bien clair qu'on aurait obtenu le même résultat en considérant les expressions — 3 + — 2 et — 2 + — 3, comme indiquant la combinaison d'une quantité inverse, *prise directement*, (§. 41. 2°.), avec une autre quantité inverse, et en écrivant, d'une manière abrégée :

$$-3-2=-5.$$
$$-2-3=-5. \text{ (1)}$$

§. 50. Or, comme nous aurions opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres inverses quelconques, entiers ou fractionnaires, il en résulte que *pour additionner deux quantités inverses, il suffit de les écrire l'une à la suite de l'autre, avec leurs signes; et de les réduire alors à la plus simple expression.*

---

(1) On a vu, dans l'arithmétique, que toute expression comme celle-ci : $9-3-2$, ne signifie point qu'il faille retrancher la dernière quantité de la seconde, avant de retrancher la seconde de la première ; qu'elle signifie, au contraire, qu'il faut retrancher de la première quantité toutes celles qui viennent ensuite avec le signe $-$; en disant, dans ce cas : $9-3=6$, et $6-2=4$; ou, tout d'un coup : $9-5=4$.

Or, comme les quantités inverses doivent se rapporter aux quantités à soustraire, il en résulte que toute expression comme celle-ci : $-3-2$, signifiera que les deux quantités inverses indiquées doivent être réunies, pour n'en former qu'une seule; en disant, dans ce cas : $-3-2=-5$.

§. 51. Donc, *pour faire l'addition effective de deux quantités directes*, (§. 46.), *ou de deux quantités inverses*, (§. 48.), *il suffit d'écrire ces quantités l'une à la suite de l'autre avec leurs signes ; et de les réduire alors à la plus simple expression.* Ce qui peut facilement s'appliquer à l'addition d'un plus grand nombre de quantités.

Soustraction effective bien présentée.

§. 52. La soustraction proprement dite ne peut avoir lieu, comme nous le savons, (§. 14. 1°.), qu'entre des quantités homogènes et semblables.

Ainsi, quand il s'agit de quantités directes et inverses, on ne peut soustraire que le direct du direct, et l'inverse de l'inverse.

§. 53. Ce n'est pas tout : ce serait une illusion que de penser qu'on peut soustraire une quantité plus grande d'une quantité plus petite ; fussent-elles même homogènes et semblables. La question qui le demanderait

serait mal présentée, et elle exigerait sans doute une rectification. Nous en parlerons dans un moment.

§. 54. Cela posé, soustrayons d'abord une quantité directe plus petite d'une quantité directe plus grande.

Soustrayons, par exemple, $+2$ de $+3$.

Ce sera soustraire 2 direct de 3 direct, pour avoir le reste 1 direct, ou $+1$.

Pour représenter cela, nous écrirons : $+3 - +2$; le signe — du milieu étant ici le signe de l'opération ou de la soustraction, et les deux autres marquant que les quantités 3 et 2 sont directes.

Or, le résultat de cette soustraction devant manifestement être $+1$, comme nous venons de le dire, nous aurons :

$$+3 - +2 = +1.$$

§. 55. Mais il est bien clair qu'on aurait obtenu le même résultat en considérant l'expression $+3 - +2$ comme indiquant la

combinaison d'une quantité directe, prise inversément, (§. 41. 3°.), avec une autre quantité directe; et en écrivant, d'une manière abrégée :

$$+ 3 - 2 = + 1.$$

§. 56. Or, comme nous aurions opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres directs, entiers ou fractionnaires, fussent-ils même égaux, il en résulte que *pour soustraire une quantité directe d'une autre quantité directe égale ou plus grande, il suffit d'écrire ces quantités l'une à la suite de l'autre, en changeant le signe de celle qui est à soustraire; et de les réduire alors à la plus simple expression.*

§. 57. Soustrayons à présent une quantité inverse plus petite d'une quantité inverse plus grande.

Soustrayons, par exemple, — 2 de — 3.

Ce sera soustraire 2 inverse de 3 inverse, pour avoir le reste 1 inverse, ou — 1.

Pour représenter cela, nous écrirons:

— 3 — — 2 ; le signe — du milieu étant ici le signe de l'opération, ou de la soustraction, et les deux autres marquant que les quantités 3 et 2 sont inverses.

Or, le résultat de cette soustraction devant manifestement être — 1, comme nous venons de le dire, nous aurons :

$$- 3 - - 2 = - 1.$$

§. 58. Mais il est bien clair qu'on aurait obtenu le même résultat, en considérant l'expression — 3 — — 2 comme indiquant la combinaison d'une quantité inverse prise inversément, (§. 41. 4°.), avec une autre quantité inverse; et en écrivant, d'une manière abrégée :

$$- 3 + 2 = - 1.$$

§. 59. Or, comme nous aurions opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres inverses, entiers ou fractionnaires, fussent-ils même égaux, il en résulte que *pour soustraire une quantité inverse d'une autre quatité inverse égale ou plus grande, il*

suffit d'écrire ces quantités l'une à la suite de l'autre, en changeant le signe de celle qui est à soustraire ; et de les réduire alors à la plus simple expression.

§. 60. Donc, *pour soustraire une quantité directe d'une autre quantité directe, égale ou plus grande,* (§. 56.), *ou une quantité inverse d'une autre quantité inverse égale ou plus grande,* (§. 59.), *il suffit d'écrire ces quantités l'une à la suite de l'autre, en changeant le signe de celle qui est à sonstraire; et de les réduire alors à la plus simple expression.* Ce qui peut facilement s'appliquer à la soustraction d'un plus grand nombre de quantités.

§. 61. Observons d'ailleurs une chose, qui résulte évidemment de tout ce que nous avons dit sur l'addition et la soustraction, c'est que :

1°. Ajouter une quantité B avec une quantité A, revient à combiner avec une quantité A une quantité B prise directement, (§. 46. 49.), ou prise avec son signe. (§. 39.)

2°. Soustraire une quantité B d'une quan-

tité A, revient à combiner avec une quantité A une quantité B prise inversément, (§. 55. 58.) ou prise avec un signe contraire au sien. (§. 39.)

Soustraction effective mal présentée.

§. 62. Continuons d'appliquer la soustraction à des quantités homogènes; mais supposons qu'on nous demande de soustraire une quantité plus grande d'une quantité plus petite.

Nous avons déja dit, (§. 53.), que ces questions, mal présentées, ne pouvaient se résoudre qu'au moyen d'une rectification.

§. 63. Imaginons donc que l'on nous demande de *soustraire* + 3 *de* + 2.

Pour tâcher de découvrir comment cette question doit être rectifiée, nous la traduirons ainsi: *Combiner avec la quantité* + 2, *la quantité* + 3 *prise inversément, ou prise avec un signe contraire au sien.* (§. 61.)

Cette traduction en amènera une autre que

voici : *Combiner avec la quantité* + 2 *la quantité* — 3.

En d'autres termes : *Combiner* 3 *inverse avec* 2 *direct*, *ou* 2 *direct avec* 3 *inverse*.

Or, il est clair que la combinaison de 3 inverse avec 2 direct, ou de 2 direct avec 3 inverse, doit avoir pour résultat 1 inverse.

Mais ce résultat ne peut s'obtenir qu'en retranchant le nombre 2 du nombre 3.

Et comme on ne peut retrancher d'une quantité quelconque qu'une quantité homogène, il faut que la quantité 2 soit de même espèce que la quantité 3 ; c'est-à-dire, inverse comme elle. Sans cela on n'aurait pas une différence inverse.

D'où il suit que notre opération se réduit à soustraire — 2 de — 3, pour avoir le reste — 1.

Donc, demander de soustraire + 3 de + 2, c'est dans le vrai demander de soustraire — 2 de — 3 ; quoiqu'on ne voie pas, au premier moment, le rapport qu'il y a

entre ces deux questions ; dont la première, prise à la lettre, est impossible (1).

---

(1) Qu'on ne pense pas que j'aille trop loin, et que ce ne soit ici qu'une combinaison de l'inverse avec le direct ; car la question qui demanderait cette combinaison serait également mal présentée, et aurait besoin de rectification.

Combiner ou ajouter une quantité inverse plus petite avec une quantité directe plus grande, c'est proprement soustraire le direct du direct. (§. 30.).

En échange, combiner ou ajouter une quantité inverse plus grande avec une quantité directe plus petite, c'est proprement soustraire l'inverse de l'inverse ; comme nous venons de le faire voir.

La question du §. 29 pourra nous aider à éclaircir tout cela. Elle était conçue en ces termes : *A quelle distance vers l'orient est placé un point qui est à 6 mètres vers l'orient, et en même tems à 10 mètres vers l'occident ?*

Elle demandait donc de combiner 6 vers l'orient, ou 6 *direct*, avec 10 vers l'occident, ou 10 *inverse*, pour en former une *distance vers l'orient.*

Notre réponse aurait dû être : 4 *inverse vers l'orient ;* et le vrai sens de cela aurait été qu'en retranchant 6 vers l'occident, ou 6 *inverse*, de 10 vers l'occident, ou de 10 *inverse*, il restait 4 vers l'occident, ou 4 *inverse ;* car il est impossible qu'un seul et même point soit en même tems vers l'orient et vers l'occident ; c'est-à-dire qu'il occupe deux places à la fois.

Cette question, en demandant de combiner 10 *in-*

Donc, ce cas revient exactement à celui du §. 57, qui est une soustraction effective bien présentée.

Pour représenter cela, nous pourrons écrire :

$$+2 - +3 = -3 - -2.$$

Mais, $-3 - -2 = -3 + 2$. (§. 58.)

Et d'ailleurs, il est bien clair, comme nous l'avons déja fait sentir, que

---

verse avec 6 *direct*, demandait donc, dans le vrai, de soustraire 6 *inverse* de 10 *inverse.*

Mais, comme nous n'avions pas encore appris à représenter le direct et l'inverse par leurs signes, nous avons traduit cette question ainsi : *A quelle distance vers l'occident est placé un point qui est à* 10 *mètres vers l'occident, et en même tems à* 6 *mètres vers l'orient ?*

Par cette traduction l'occident est devenu direct et l'orient inverse; et il a s'agi alors de combiner 6 vers l'orient, ou 6 *inverse*, avec 10 vers l'occident, ou 10 *direct*, pour en former une *distance vers l'occident.*

Notre réponse a donc été : 4 *direct vers l'occident* ; ce qui est synonyme de 4 *inverse vers l'orient* ; et le vrai sens de cela était également, qu'en retranchant 6 vers l'occident, ou 6 *direct*, de 10 vers l'occident, ou de 10 *direct*, il restait 4 vers l'occident, ou 4 *direct.*

Ainsi, cette seconde question, en demandant de combiner 6 *inverse* avec 10 *direct*, demandait dans le vrai de soustraire 6 *direct* de 10 *direct.*

$-3+2=+2-3.$

Donc, $+2-+3=+2-3=-1.$

§. 64. Or, comme nous aurions opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres directs, entiers ou fractionnaires, il en résulte que *pour trouver la réponse aux questions mal présentées qui demandent de soustraire une quantité directe plus grande d'une quantité directe plus petite, il suffit d'écrire ces quantités, l'une à la suite de l'autre, en changeant le signe de celle qui est à soustraire ; et de les réduire alors à la plus simple expression.*

§. 65. Imaginons, maintenant, qu'on nous demande de *soustraire* — 3 *de* — 2.

Pour tâcher de découvrir comment cette question doit être rectifiée, nous la traduirons ainsi : *Combiner avec la quantité* — 2, *la quantité* — 3 *prise inversément, ou prise avec un signe contraire au sien.* (§. 61.)

Cette traduction en amènera une autre que voici : *Combiner avec la quantité* — 2 *la quantité* + 3.

En d'autres termes : *Combiner 3 direct avec 2 inverse, ou 2 inverse avec 3 direct.*

Or, il est clair que la combinaison de 3 direct avec 2 inverse, ou de 2 inverse avec 3 direct, doit avoir pour résultat 1 direct.

Mais ce résultat ne peut s'obtenir ici qu'en retranchant le nombre 2 du nombre 3.

Et comme on ne peut retrancher d'une quantité quelconque qu'une quantité homogène, il faut que la quantité 2 soit de même espèce que la quantité 3 ; c'est-à-dire, directe comme elle. Sans cela on n'aurait pas une différence directe.

D'où il suit que notre opération se réduit à soustraire + 2 de + 3, pour avoir le reste + 1.

Donc, demander de soustraire — 3 de — 2, c'est dans le vrai demander de soustraire + 2 de + 3 ; quoiqu'on ne voie pas, au premier moment, le rapport qu'il y a entre ces deux questions ; dont la première, prise à la lettre, est impossible. (§. 63. note.)

Donc, ce cas revient exactement à celui

du §. 54, qui est une soustraction effective, bien présentée.

Pour représenter cela, nous pourrons écrire :

$$-2 - -3 = +3 - +2.$$

Mais, $+3 - +2 = +3 - 2$. (§. 55.)

Et, d'ailleurs, il est bien clair, comme nous l'avons déja fait sentir, que

$$+3 - 2 = -2 + 3.$$

Donc, $-2 - -3 = -2 + 3 = +1$.

§. 66. Or, comme nous aurions opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres inverses, entiers ou fractionnaires, il en résulte que, *pour trouver la réponse aux questions mal présentées qui demandent de soustraire une quantité inverse plus grande, d'une quantité inverse plus petite, il suffit d'écrire ces quantités, l'une à la suite de l'autre, en changeant le signe de celle qui est à soustraire ; et de les réduire alors à la plus simple expression.*

§. 67. Donc, *pour répondre aux ques-*

tions, mal présentées, qui demandent de soustraire une quantité directe plus grande, d'une quantité directe plus petite, (§. 64.), *ou une quantité inverse plus grande, d'une quantité inverse plus petite,* (§. 66.), *il suffit d'écrire ces quantités, l'une à la suite de l'autre, en changeant le signe de celle qui est à soustraire; et de les réduire alors à la plus simple expression.* Ce qui peut facilement s'appliquer à la soustraction d'un plus grand nombre de quantités.

Addition nominale.

[Véritable soustraction. (§. 43.)]

§. 68. Si l'on nous demandait d'ajouter une quantité inverse avec une quantité directe, ou une quantité directe avec une quantité inverse, nous reconnaîtrions bientôt que, sous le nom d'une addition, on nous demande une véritable soustraction. (§. 17. 27. 28. 29. 30. 63 note.)

§. 69. Essayons d'abord d'ajouter une quantité inverse plus petite, avec une quantité directe plus grande, ou une quantité directe

directe plus grande avec une quantité inverse plus petite.

Imaginons, par exemple, qu'on nous demande d'*ajouter* — 2 *avec* + 3, *ou* + 3 *avec* — 2.

Pour tâcher de découvrir comment cette question doit être rectifiée, nous la traduirons ainsi : *Combiner avec la quantité* + 3, *la quantité* — 2, *prise directement*, *c'est-à-dire*, *prise avec son signe*, (§. 61.) ; *ou combiner avec la quantité* — 2, *la quantité* + 3, *prise directement*, *c'est-à-dire*, *prise avec son signe*. (§. 61.)

Cette traduction en amènera une autre que voici : *Combiner avec la quantité* + 3 *la quantité* — 2 ; *ou combiner avec la quantité* — 2 *la quantité* + 3.

En d'autres termes : *Combiner* 2 *inverse avec* 3 *direct*, *ou* 3 *direct avec* 2 *inverse*.

Or, il est clair que la combinaison de 2 inverse avec 3 direct, ou de 3 direct avec 2 inverse, doit avoir pour résultat 1 direct.

Mais ce résultat ne peut s'obtenir ici qu'en

retranchant le nombre 2 du nombre 3.

Et comme on ne peut retrancher d'une quantité quelconque qu'une quantité homogène, il faut que la quantité 2 soit ici de même espèce que la quantité 3; c'est-à-dire, directe comme elle. Sans cela on n'aurait pas une différence directe.

D'où il suit que notre opération se réduit à soustraire + 2 de + 3, pour avoir le reste + 1.

Donc demander d'ajouter — 2 avec + 3, ou + 3 avec — 2, c'est, dans le vrai, demander de soustraire + 2 de + 3; quoiqu'on ne voie pas, au premier moment, le rapport qu'il y a entre ces deux questions; dont la première, prise à la lettre, est impossible.

Donc ce cas revient exactement à celui du §. 54, qui est une soustraction effective bien présentée; à laquelle nous avions déja rapporté le cas du §. 65.

C'est-à-dire que soustraire — 3 de — 2, (§. 65), et ajouter + 3 avec — 2, (§. 69),

tout cela revient, dans le fond, à soustraire $+ 2$ de $+ 3$. (§. 54.)

Pour représenter l'opération actuelle, nous pourrons écrire :

$$\left.\begin{matrix} +3+-2 \\ \text{ou} \\ -2++3 \end{matrix}\right\} = +3-+2.$$

Mais $+3-+2=+3-2$. (§. 55.)
Et d'ailleurs il est clair que

$$+3-2=-2+3.$$

$$\text{Donc}\left\{\begin{matrix} +3+-2 \\ \text{ou} \\ -2++3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} +3-2 \\ \text{ou} \\ -2+3 \end{matrix}\right\} = +1.$$

§. 70. Or, comme nous aurions opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres, entiers ou fractionnaires, il en résulte que *pour faire* L'ADDITION NOMINALE *d'une quantité directe plus grande avec une quantité inverse plus petite, il suffit d'écrire ces quantités l'une après l'autre, en conservant leurs signes, et de faire alors la réduction.*

§. 71. Essayons, à présent, d'ajouter une quantité inverse plus grande avec une quantité directe plus petite, ou une quantité directe plus petite avec une quantité inverse plus grande.

Imaginons, par exemple, qu'on nous demande d'*ajouter* — 3 *avec* + 2, *ou* + 2 *avec* — 3.

Pour tâcher de découvrir comment cette question doit être rectifiée, nous la traduirons ainsi : *Combiner avec la quantité* + 2 *la quantité* — 3, *prise directement, c'est-à-dire, prise avec son signe*, (§. 61.); *ou combiner avec la quantité* — 3 *la quantité* + 2, *prise directement, c'est-à-dire, prise avec son signe.* (§. 61.)

Cette traduction en amènera une autre que voici : *Combiner avec la quantité* + 2 *la quantité* — 3 ; *ou combiner avec la quantité* — 3 *la quantité* + 2.

En d'autres termes : *Combiner* 3 *inverse avec* 2 *direct, ou* 2 *direct avec* 3 *inverse.*

Or, il est clair que la combinaison de 3

inverse avec 2 direct, ou de 2 direct avec 3 inverse, doit avoir pour résultat 1 inverse.

Mais ce résultat ne peut s'obtenir ici qu'en retranchant le nombre 2 du nombre 3.

Et comme on ne peut retrancher d'une quantité quelconque qu'une quantité homogène, il faut que la quantité 2 soit de même espèce que la quantité 3 ; c'est-à-dire, inverse comme elle. Sans cela on n'aurait pas une différence inverse.

D'où il suit que notre opération se réduit à soustraire — 2 de — 3, pour avoir le reste — 1.

Donc demander d'ajouter — 3 avec + 2, ou + 2 avec — 3, c'est, dans le vrai, demander de soustraire — 2 de — 3 ; quoiqu'on ne voie pas, au premier moment, le rapport qu'il y a entre ces deux questions ; dont la première, prise à la lettre, est impossible.

Donc, ce cas revient exactement à celui du §. 57, qui est une soustraction effective bien présentée ; à laquelle nous avions déja rapporté le cas du §. 63.

C'est-à-dire que soustraire $+3$ de $+2$, (§. 63), et ajouter -3 avec $+2$, (§. 71.), tout cela revient, dans le fond, à soustraire -2 de -3. (§. 57.)

Pour représenter l'opération actuelle, nous pourrons écrire :

$$\left.\begin{array}{c} +2+-3 \\ \text{ou} \\ -3++2 \end{array}\right\} = -3 -- 2.$$

Mais $-3 \div -2 = -3 + 2$. (§. 58.)

Et d'ailleurs il est clair que

$$-3+2=+2-3.$$

$$\text{Donc}\left\{\begin{array}{c} +2+-3 \\ \text{ou} \\ -3++2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} +2-3 \\ \text{ou} \\ -3+2 \end{array}\right\} = -1.$$

§. 72. Or, comme nous aurions opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres entiers ou fractionnaires, il en résulte que *pour faire* L'ADDITION NOMINALE *d'une quantité inverse plus grande avec une quantité directe plus petite, il suffit d'écrire*

ces quantités, l'une après l'autre, en conservant leurs signes, et de faire alors la réduction.

§. 73. Donc, *pour répondre aux questions, mal présentées, qui demandent d'ajouter une quantité directe avec une quantité inverse, ou une quantité inverse avec une quantité directe*, (§. 70. 72.), *il suffit d'écrire ces quantités l'une à la suite de l'autre, en conservant leurs signes ; et de les réduire alors à la plus simple expression.* Ce qui peut facilement s'appliquer à l'addition nominale d'un plus grand nombre de quantités.

Soustraction nominale.

[Véritable addition. (§. 43.)]

§. 74. Si l'on nous demandait de soustraire une quantité inverse d'une quantité directe, ou une quantité directe d'une quantité inverse, nous reconnaîtrions bientôt que, sous le nom d'une soustraction, on nous demande une véritable addition.

§. 75. Essayons d'abord de soustraire une

quantité inverse d'une quantité directe plus grande ou plus petite.

Imaginons, par exemple, qu'on nous demande de soustraire — 2 de + 3, ou — 3 de + 2.

Pour tâcher de découvrir comment cette question doit être rectifiée, nous la traduirons ainsi : *Combiner avec la quantité + 3 la quantité — 2 prise inversément, c'est-à-dire, prise avec un signe contraire au sien,* (§. 61.); *ou, combiner avec la quantité + 2 la quantité — 3 prise inversément, c'est-à-dire, prise avec un signe contraire au sien.* (§. 61.)

Cette traduction en amènera une autre que voici : *Combiner avec la quantité + 3 la quantité + 2 ; ou, combiner avec la quantité + 2 la quantité + 3.*

En d'autres termes : *Combiner 2 direct avec 3 direct, ou 3 direct avec 2 direct.*

Or, il est clair que la combinaison de 2 direct avec 3 direct, ou de 3 direct avec 2 direct, doit avoir pour résultat 5 direct.

Mais ce résultat ne peut s'obtenir ici qu'en

ajoutant le nombre 2 avec le nombre 3, ou le nombre 3 avec le nombre 2.

Et comme on ne peut ajouter que des quantités homogènes, il faut que les quantités 2 et 3 soient ici de même espèce; c'est-à dire directes. Sans cela on n'aurait pas une somme directe.

D'où il suit que notre opération se réduit à additionner + 2 avec + 3, ou + 3 avec + 2, pour avoir la somme + 5.

Donc demander de soustraire — 2 de + 3, ou — 3 de + 2, c'est, dans le vrai, demander d'ajouter + 2 avec + 3, ou + 3 avec + 2; quoiqu'on ne voie pas, au premier moment, le rapport qu'il y a entre ces deux questions; dont la première, prise à la lettre, est impossible.

Donc, ce cas revient exactement à celui du §. 45, qui est une addition effective bien présentée.

Pour représenter cela, nous pourrons écrire :

$$\left.\begin{matrix} +3 - -2 \\ \text{ou} \\ +2 - -3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} +3 + +2 \\ \text{ou} \\ +2 + +3 \end{matrix}\right.$$

$$\text{Mais} \left\{\begin{matrix} +3 + +2 \\ \text{ou} \\ +2 + +3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} +3 +2 \\ \text{ou} \\ +2 +3 \end{matrix}\right. \text{ (§. 46.)}$$

$$\text{Donc} \left\{\begin{matrix} +3 - -2 \\ \text{ou} \\ +2 - -3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} +3 +2 \\ \text{ou} \\ +2 +3 \end{matrix}\right\} = +5.$$

§. 76. Or, comme nous aurions opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres, entiers ou fractionnaires, il en résulte que *pour* SOUSTRAIRE NOMINALEMENT *une quantité inverse d'une quantité directe, il suffit d'écrire ces quantités, l'une à la suite de l'autre, en changeant le signe de celle qui est à soustraire; et de les réduire alors à la plus simple expression.*

§. 77. Essayons à présent de soustraire une quantité directe d'une quantité inverse plus grande ou plus petite.

Imaginons, par exemple, qu'on nous demande de soustraire + 2 de — 3, ou + 3 de — 2.

Pour tâcher de découvrir comment cette question doit être rectifiée, nous la traduirons ainsi : *Combiner avec la quantité — 3 la quantité + 2, prise inversément, c'est-à-dire, prise avec un signe contraire au sien,* (§. 61.); *ou combiner avec la quantité — 2 la quantité + 3, prise inversément, c'est-à-dire, prise avec un signe contraire au sien.* (§. 61.)

Cette traduction en amènera une autre que voici : *Combiner avec la quantité — 3 la quantité — 2; ou combiner avec la quantité — 2 la quantité — 3.*

En d'autres termes : *Combiner 2 inverse avec 3 inverse, ou 3 inverse avec 2 inverse.*

Or, il est clair que la combinaison de 2 inverse avec 3 inverse, ou de 3 inverse avec 2 inverse, doit avoir pour résultat 5 inverse.

Mais ce résultat ne peut s'obtenir ici qu'en ajoutant le nombre 2 avec le nombre 3, ou le nombre 3 avec le nombre 2.

Et comme on ne peut additionner que des quantités homogènes, il faut que les quantités 2 et 3 soient ici de même espèce; c'est-à-dire, inverses. Sans cela on n'aurait pas une somme inversé.

D'où il suit que notre opération se réduit à additionner — 2 avec — 3, ou — 3 avec — 2, pour avoir la somme — 5.

Donc, demander de soustraire + 2 de — 3, ou + 3 de — 2, c'est, dans le vrai, demander d'additionner — 2 avec — 3, ou — 3 avec — 2; quoiqu'on ne voie pas, au premier moment, le rapport qu'il y a entre ces deux questions; dont la première, prise à la lettre, est impossible.

Donc, ce cas revient exactement à celui du §. 48, qui est une addition effective bien présentée.

Pour représenter cela nous pourrons écrire :

$$\left.\begin{matrix} -3 - +2 \\ \text{ou} \\ -2 - +3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -3 + -2 \\ \text{ou} \\ -2 + -3 \end{matrix}\right.$$

$$\text{Mais}\left\{\begin{matrix} -3+-2 \\ \text{ou} \\ -2+-3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -3-2 \\ \text{ou} \\ -2-3 \end{matrix}\right. \quad (\text{§. } 49.)$$

$$\text{Donc}\left\{\begin{matrix} -3-+2 \\ \text{ou} \\ -2-+3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -3-2 \\ \text{ou} \\ -2-3 \end{matrix}\right\} = -5.$$

§. 78. Or, comme nous aurions opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres, entiers ou fractionnaires, il en résulte que *pour* SOUSTRAIRE NOMINALEMENT *une quantité directe d'une quantité inverse, il suffit d'écrire ces quantités l'une à la suite de l'autre, en changeant le signe de celle qui est à soustraire; et de les réduire alors à la plus simple expression.*

§. 79. Donc, *pour répondre aux questions mal présentées, qui demandent de soustraire une quantité inverse d'une quantité directe*, (§. 76.), *ou une quantité directe d'une quantité inverse*, (§. 78.), *il suffit d'écrire ces quantités l'une à la suite de l'autre, en chan-*

geant le signe de celle qui est à soustraire ; et de les réduire alors à la plus simple expression. Ce qui peut facilement s'appliquer à la soustraction nominale d'un plus grand nombre de quantités.

Résumé de ce qu'on vient de dire sur l'addition et la soustraction des quantités directes et inverses.

§. 80. En passant en revue tous les cas possibles de l'addition et de la soustraction des quantités directes et inverses, nous avons eu occasion d'observer :

1°. Que les deux cas de l'addition effective renfermaient les deux cas de la soustraction nominale.

2°. Que les deux cas de la soustraction effective bien présentée renfermaient les deux cas de la soustraction effective mal présentée, et les deux cas de l'addition nominale (1).

---

(1) Voyez les tables numéros 1 et 2, à la fin de l'ouvrage.

Ensorte qu'il est de plus en plus démontré qu'on ne peut additionner et soustraire que des quantités homogènes et semblables ; et, en outre, qu'on ne peut soustraire d'une quantité quelconque qu'une quantité plus petite.

Toutes les opérations qui sont présentées sous un autre point de vue sont mal présentées ; mais les règles ordinaires, c'est-à-dire, celles que nous avons indiquées, ont le double avantage d'être générales, et de corriger, en quelque sorte, les questions vicieuses, souvent même sans que le calculateur s'en doute. Du moins, conduisent-elles toujours à des résultats vrais et conformes à ceux que donneraient ces questions, si elles étaient rectifiées.

Ces règles, éparses ici dans plusieurs articles différens, doivent maintenant être rapprochées, et nous les réduirons à deux ; celle pour l'addition, soit effective, soit nominale ; et celle pour la soustraction, effective ou nominale, bien ou mal présentée.

§. 81. Résumant donc le contenu des §. 51 et 73, nous dirons :

Pour additionner plusieurs quantités quelconques, il faut écrire ces quantités les unes à la suite des autres, sans changer leurs signes; et faire alors la réduction.

§. 82. Résumant ensuite le contenu des §. 60, 67 et 79, nous dirons :

Pour soustraire une ou plusieurs quantités quelconques d'une ou de plusieurs autres quantités, il faut écrire toutes ces quantités les unes à la suite des autres, en changeant les signes des quantités à soustraire; et faire alors la réduction.

§. 83. Ainsi, pour ajouter $+ 125$ avec $+ 253$, écrivez : $+ 125 + 253 = + 378$.

Pour ajouter $- 5146$ avec $- 234$ et avec $- 12$, écrivez : $- 5146 - 234 - 12 = - 5392$.

Pour ajouter $+ 298 \frac{7}{8}$ avec $- 97 \frac{3}{4}$; écrivez : $+ 298 \frac{7}{8} - 97 \frac{3}{4} = + 201 \frac{1}{8}$.

Pour ajouter $+ 595 \frac{1}{2}$ avec $- 2368$ et

avec

avec -6, écrivez : $+595\frac{1}{2}-2368-6=-1778\frac{1}{2}$.

§. 84. De même, pour soustraire $+1298\frac{3}{4}$ de $+2560$, écrivez : $+2560-1298\frac{3}{4}=+1261\frac{1}{4}$.

Pour soustraire $-256\frac{5}{6}$ de -2937, écrivez : $-2937+256\frac{5}{6}=-2680\frac{1}{6}$.

Pour soustraire $+236$ et $+11$ de $+125$, écrivez : $+125-236-11=-122$.

Pour soustraire -598 et -11 de -489, écrivez : $-489+598+11=+120$.

Pour soustraire -712 de $+895$, écrivez : $+895+712=+1607$.

Pour soustraire $+54$ de -127, écrivez : $-127-54=-181$.

Pour soustraire -208 de $+49$, écrivez : $+49+208=+257$.

Pour soustraire $+296\frac{1}{2}$ de $-67\frac{3}{4}$, écrivez : $-67\frac{3}{4}-296\frac{1}{2}=-364\frac{1}{4}$.

CHAPITRE IV.

De la multiplication et de la division des quantités directes et inverses.

§. 85. Nous avons vu (§. 41.) que le direct, pris directement, restait direct; que l'inverse, pris directement, restait inverse; que le direct, pris inversément, devenait inverse; et enfin que l'inverse, pris inversément, devenait direct. Je demande qu'on veuille bien relire, à cette occasion, le Chapitre second.

Ces résultats n'offrent rien que de très-simple et de très-naturel; et je me flatte qu'ils ne présenteront aucune difficulté dans le Chapitre que je viens d'indiquer.

Celle de toutes ces propositions qui pourrait peut-être embarrasser un peu les commençans, c'est la dernière; mais elle ne les arrêtera plus s'ils font attention que *l'inverse, pris inversément, ce n'est pas l'inverse laissé inverse, mais que c'est l'inverse pris dans le*

sens contraire de l'inverse; et qui devient, par conséquent, direct. (§. 41. 4°.)

En d'autres termes: *Prendre l'inverse inversément, c'est prendre* L'INVERSE DE L'INVERSE.

Or, il est clair que L'INVERSE DE L'INVERSE, C'EST LE DIRECT.

Nous savons, par exemple, que l'occident est inverse de l'orient, et que l'orient, à son tour, est inverse de l'occident. (§. 22.)

Ainsi, quand on parle de l'orient, l'occident est inverse, et, dans ce cas, l'inverse de l'inverse c'est l'inverse de l'occident, c'est-à-dire, l'orient.

De même, nous savons que les dettes sont inverses des biens, et que les biens, à leur tour, sont inverses des dettes, (§. 22.)

Ainsi, quand on parle de biens, les dettes sont inverses, et, dans ce cas, l'inverse de l'inverse, c'est l'inverse des dettes, c'est-à-dire, les biens.

Je le répète donc encore: L'INVERSE DE L'INVERSE C'EST LE DIRECT.

§. 86. Mais, il est bien clair qu'au lieu de prendre les quantités directes et inverses une fois directement, (§. 41. 1°. 2°.), ou une fois inversément, (§. 41. 3°. 4°.), on peut les prendre plusieurs fois directement, ou plusieurs fois inversément.

Rien ne nous empêche, par exemple, de prendre la quantité + 4 trois fois directement, ou trois fois inversément.

Dans le premier cas, nous aurons :

$$+4+4+4=+12;$$

Et dans le second nous aurons :

$$-4-4-4=-12.$$

Or, ces deux opérations sont deux multiplications; et nous pouvons dire que la quantité + 4 a été multipliée, dans le premier cas, par 3 directement, ou par + 3, et, dans le second cas, par 3 inversément, ou par — 3.

Il est bien vrai que, dans ce dernier cas, la multiplication de + 4 par — 3 revient à

une multiplication de — 4 par 3, ou par + 3 ; comme on le voit évidemment ici ; mais nous sommes déja accoutumés aux opérations mal présentées, et nous reconnaîtrons sans peine que celle-ci en est une.

Du reste les réflexions que nous venons de faire nous engageront à examiner en détail les multiplications par des quantités directes, et les multiplications par des quantités inverses ; et c'est ce qui va nous occuper maintenant.

Quant à ce qu'il faut penser des multiplicateurs fractionnaires, c'est un objet qui a déja été traité dans l'arithmétique, et sur lequel nous ne reviendrons pas ici ; les signes des quantités étant essentiellement ce qui doit fixer notre attention.

Multiplication effective bien présentée, le multiplicateur étant direct.

§. 87. D'après tout ce que nous avons dit, il est bien clair que multiplier une quan-

tité quelconque par un nombre direct, c'est prendre cette quantité directement, c'est-à-dire, avec son signe, autant de fois que l'indique le multiplicateur. (§. 39. 40. 41. 86.)

Il en résulte que le produit se trouvera direct si le multiplicande est direct; et qu'il se trouvera inverse si le multiplicande est inverse.

C'est même là la seule multiplication véritable, car le produit n'étant composé que du multiplicande pris autant de fois que l'indique le multiplicateur, ces deux quantités, le multiplicande et le produit doivent nécessairement être homogènes et semblables.

§. 88. Multiplier, par exemple, + 4 par + 3, c'est prendre + 4 trois fois directement, c'est-à-dire, trois fois avec son signe. (§. 87.)

D'ailleurs, en général, le direct pris directement reste direct. (§. 41. 1°.)

Donc $+4 \times +3 = +4 +4 +4 = +12$.

§. 89. Et comme on pourrait raisonner de la même manière avec d'autres nombres,

qui seraient dans le cas de ceux-là, il en résulte qu'*une quantité directe, multipliée par une quantité directe, donne un produit direct.* (§. 87.)

Ou, ce qui revient au même, que

$$+ \times + = +. \text{ (1)}$$

§. 90. De même, multiplier — 4 par + 3, c'est prendre la quantité — 4 trois fois directement; c'est-à-dire, trois fois avec son signe. (§. 87.)

D'ailleurs, en général, l'inverse pris directement reste inverse. (§. 41. 2°.)

Donc $-4 \times +3 = -4 -4 -4 = -12$.

§. 91. Et comme on pourrait raisonner de la même manière avec d'autres nombres, qui seraient dans le cas de ceux-là, il en résulte qu'*une quantité inverse, multipliée par une quantité directe, donne un produit inverse.* (§. 87.)

---

(1) Lisez : *Le direct pris directement c'est le direct.*

Ou, ce qui revient au même, que

$$- \times + = - \quad (1).$$

§. 92. Donc, *dans toute multiplication, quand le multiplicateur est direct, le produit a le même signe que le multiplicande.* (§. 87. 89. 91.)

Multiplication effective mal présentée, le multiplicateur étant inverse.

§. 93. Si multiplier une quantité quelconque par un nombre direct, c'est prendre cette quantité directement, c'est-à-dire, avec son signe, autant de fois que l'indique le multiplicateur, (§. 87.); en échange, multiplier une quantité quelconque par un nombre inverse, c'est prendre cette quantité inversément, c'est-à-dire, avec un signe contraire au sien, autant de fois que l'indique le multiplicateur. (§. 39. 40. 41. 86.)

Il en résulte que le produit se trouvera

---

(1) Lisez : *L'inverse pris directement c'est l'inverse.*

inverse si le multiplicande est direct ; et qu'il se trouvera direct si le multiplicande est inverse.

Mais nous entrevoyons déja que ces opérations ne peuvent être que mal présentées, (§. 86. 87.); et c'est ce que nous allons examiner plus en détail.

§. 94. Multiplier, par exemple, + 4 par — 3, c'est prendre la quantité + 4 trois fois inversément ; c'est-à-dire, trois fois avec un signe contraire au sien. (§. 93.)

D'ailleurs, en général, le direct pris inversément devient inverse. (§. 41. 3°.)

Donc $+4 \times -3 = -4 -4 -4 = -12$.

§. 95. On voit manifestement ici que cette multiplication revient à celle du §. 90; et que demander de multiplier + 4 par — 3, c'est dans le vrai demander de multiplier — 4 par 3, ou par + 3. (§. 86.) (1).

---

(1) Demander de multiplier 4 *direct* par 3 *inverse*,

§. 96. Nous savons, d'ailleurs, qu'un produit ne peut contenir que des quantités semblables à celles du multiplicande, et que, par conséquent, un multiplicande vraiment direct, ne saurait donner un produit inverse.

Si nous parlons, dans la suite, comme si la chose était possible, et si nous indiquons des produits inverses pour des multiplicandes directs, ce ne sera là qu'une manière de répondre à des questions mal présentées; et *nous serons, du moins, bien avertis de ce que nous ferons.*

§. 97. Par exemple, nous venons de voir que $+ 4 \times - 3$ n'est autre chose, dans le vrai, que $- 4 \times + 3$, (§. 95.). Mais comme $- 4 \times + 3 = - 12$, (§. 90), il n'y

---

c'est demander de prendre 4 *direct* trois fois inversément. (§. 86.)

Mais 4 *direct*, pris inversément, n'est autre chose que 4 *inverse*. (§. 41. 3°.)

Donc demander de multiplier 4 *direct* par 3 *inverse*, c'est demander de prendre trois fois 4 *inverse*; ou de multiplier 4 *inverse* par 3.

aura pas d'erreur à craindre en disant, immédiatement, ainsi que nous l'avons déja fait, (§. 94), que $+4 \times -3 = -12$.

§. 98. Et comme on raisonnerait de la même manière avec d'autres nombres qui seraient dans le cas de ceux-là, on peut dire, en général, que *pour trouver la réponse aux questions mal présentées, qui demandent de multiplier une quantité directe par un nombre inverse, il suffit de prendre un produit inverse.* (§. 93.)

Ou, ce qui revient au même, que

$$+ \times - = -. \text{ (1)}$$

§. 99. De même, multiplier -4 par -3, c'est prendre la quantité -4 trois fois inversément; c'est-à-dire trois fois avec un signe contraire au sien. (§. 93.)

D'ailleurs, en général, l'inverse pris inversément devient direct. (§. 41. 4°. et §. 85.)

Donc $-4 \times -3 = +4 +4 +4 = +12$.

(1) Lisez : *Le direct pris inversément c'est l'inverse.*

§. 100. On voit manifestement ici que cette multiplication revient à celle du §. 88; et que demander de multiplier — 4 par — 3, c'est dans le vrai demander de multiplier + 4 par 3, ou par + 3. (1).

§. 101. D'ailleurs, et nous le répétons encore, un produit ne peut contenir que des quantités semblables à celles du multiplicande; et, par conséquent, un multiplicande vraiment inverse ne saurait donner un produit direct.

Si nous parlons, dans la suite, comme si la chose était possible, et si nous indiquons des produits directs pour des multiplicandes inverses, ce ne sera là qu'une manière de répondre à des questions mal présentées; et

---

(1) Demander de multiplier 4 *inverse* par 3 *inverse*, c'est demander de prendre 4 *inverse* trois fois inversément. (§. 86.)

Mais 4 *inverse* pris inversément, n'est autre chose que 4 *direct*. (§. 41. 4°. et §. 85.)

Donc, demander de multiplier 4 *inverse* par 3 *inverse*, c'est demander de prendre trois fois 4 *direct*, ou de multiplier 4 *direct* par 3.

nous serons, du moins, bien avertis de ce que nous ferons.

§. 102. Par exemple, nous venons de voir que — 4 × — 3 n'est autre chose, dans le vrai, que + 4 × + 3, (§. 100). Mais comme + 4 × + 3 = + 12, (§. 88.), il n'y aura pas d'erreur à craindre en disant, immédiatement, ainsi que nous l'avons déja fait, (§. 99.), que — 4 × — 3 = + 12.

§. 103. Et comme on raisonnerait de la même manière avec d'autres nombres qui seraient dans le cas de ceux-là, on peut dire, en général, que *pour trouver la réponse aux questions mal présentées, qui demandent de multiplier une quantité inverse par un nombre inverse, il suffit de prendre un produit direct.* (§. 93.)

Ou, ce qui revient au même, que

$$- \times - = + \quad (1).$$

§. 104. Donc, *dans toute multiplication*,

---

(1) Lisez : *L'inverse pris inversément c'est le direct.* (§. 85.)

quand le multiplicateur est direct, le produit a le même signe que le multiplicande, (§. 92); *et quand le multiplicateur est inverse, le produit a un signe contraire à celui du multiplicande.* (§. 93. 98. 103.)

§. 105. Faisons encore ici une observation, et ne craignons point dans des matières semblables, de nous répéter, et de nous répéter souvent.

S'il est incontestable qu'il n'y a de véritables multiplications que celles dans lesquelles le multiplicateur est direct, il n'en est pas moins vrai pour cela que ces opérations se présentent souvent au calculateur sous le point de vue de multiplications par des nombres inverses.

Or, en suivant la règle donnée pour ces cas-là, on obtient un résultat qui répond bien plus à la véritable question qu'à la question mal présentée.

L'essentiel est que les commençans soient prévenus; et il me paraît qu'on néglige de le faire.

S'ils sont prévenus, ils sauront qu'on n'a jamais de véritable multiplicateur inverse; et que multiplier, par exemple, l'inverse par l'inverse, c'est proprement et rigoureusement, multiplier le direct par le direct; ce qui doit donc, sans aucune difficulté, donner un produit direct. (§. 95. 100.) (1).

Divisions effectives bien et mal présentées.

1°. Le dividende et le diviseur ayant le même signe.

§. 106. La division sert à partager une quantité en parties égales, soit pour connaître le nombre de ces parties, la valeur d'une seule étant donnée, soit pour connaître la valeur d'une partie, leur nombre étant donné. (*Voyez l'Arithmétique d'Emile.*)

Ainsi, si l'on nous demande de diviser + 12 par + 4, ce sera, ou pour chercher combien de fois + 4 est contenu dans + 12, ou pour diviser + 12 en + 4 parties égales. Et

---

(1) Voyez la table numéro 3, à la fin de l'ouvrage.

ainsi des autres exemples qu'on pourrait choisir.

Quant à ce qu'il faut penser des diviseurs fractionnaires, c'est un objet qui a déja été traité dans l'arithmétique, et sur lequel nous ne reviendrons pas ici ; les signes des quantités étant essentiellement ce qui doit à présent fixer notre attention.

§. 107. Cela posé, divisons d'abord une quantité directe par une quantité directe ; par exemple, $+12$ par $+4$.

Chercher combien de fois $+4$ *est contenu dans* $+12$, c'est chercher combien de fois la quantité directe 4 est contenue dans la quantité directe 12.

Or, il est clair que le direct est contenu directement dans le direct ; puisque le direct pris directement reste direct. (§. 41. 1°.)

Donc, $+4$ est contenu dans $+12$ directement 3 fois, ou $+3$ fois.

Et, en effet, $+4 \times +3 = +12$.

§. 108. *Diviser* $+12$ *par* $+4$ revient aussi à *chercher la quatrième partie de* $+12$,

(§. 106),

(§. 106), qui est manifestement + 3 ; puisque + 3 × + 4 = + 12.

Donc, dans tous les cas, + 12 : + 4 = + 3.

§. 109. Et comme on aurait opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres directs, il en résulte qu'*une quantité directe, divisée par une quantité directe, donne un quotient direct.*

Ou, ce qui revient au même, que :

$$+ : + = +.$$

Et, en effet, le diviseur direct, multiplié par le quotient direct, (§. 107), ou le quotient direct multiplié par le diviseur direct, (§. 108.), redonne le dividende direct. (§. 104.)

§. 110. Maintenant divisons une quantité inverse par une quantité inverse, par exemple, — 12 par — 4.

Chercher combien de fois — 4 *est contenu dans* — 12, c'est chercher combien de fois

la quantité inverse 4 est contenue dans la quantité inverse 12.

Or, il est clair que l'inverse est contenu directement dans l'inverse, puisque l'inverse pris directement reste inverse. (§. 41. 2°.)

Donc, — 4 est contenu dans — 12, directement trois fois, ou + 3 fois.

Et, en effet, $-4 \times +3 = -12$.

§. 111. Si l'on voulait diviser — 12 en 4 parties égales, pour avoir la valeur d'une de ces parties, qui serait manifestement — 3, ce serait alors — 12 : + 4; et ce cas appartenant à celui dans lequel le dividende et le diviseur ont un signe contraire, nous en renverrions l'examen.

§. 112. Mais si l'on demandait de *diviser* — 12 *en* — 4 *parties égales*, (§ 106.), il serait clair que cette question serait mal présentée; et voici comment nous pourrions l'envisager.

Diviser — 12 *en* — 4 *parties égales*, c'est *diviser* 12 *inverse dans un nombre inverse* 4

de parties égales; ou bien c'est *chercher la quatrième partie inverse de* — 12.

Mais pour savoir quelle est *la quatrième partie inverse* d'une quantité, il importe de savoir d'abord quel est *le tout inverse* de cette quantité; car la quatrième partie inverse sera évidemment la quatrième partie du tout inverse.

Or, il est clair que *le tout inverse de* — 12, ou, en d'autres termes, que *l'inverse de* — 12, c'est + 12. (§. 85.)

Donc, la quatrième partie inverse de — 12, sera la quatrième partie de + 12, c'est-à-dire, + 3.

Et, en effet, + 3 × — 4 = — 12.

§. 113. Ainsi donc la division de — 12 par — 4, offre deux cas différens, l'un bien présenté, l'autre mal présenté.

Le premier cas a lieu quand on divise — 12 en parties égales, valant chacune — 4, et qu'on demande le nombre de ces parties; qui est 3, ou + 3. (§. 110.)

Le second cas a lieu quand on demande

de diviser — 12 en — 4 parties égales, pour avoir la valeur d'une de ces parties. Demander cela, c'est dans le vrai demander de diviser + 12 en + 4 parties égales pour avoir au quotient + 3, (§. 112); ce qui fait que ce cas revient exactement au cas bien présenté du §. 108.

§. 114. Donc, dans tous les cas, — 12 : — 4 = + 3. (§. 110. 112.)

§. 115. Et comme on aurait opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres inverses, il en résulte qu'*une quantité inverse, divisée par une quantité inverse, donne un quotient direct.*

Ou, ce qui revient au même, que

$$- : - = +.$$

Et, en effet, le diviseur inverse, multiplié par le quotient direct, (§. 110.), ou le quotient direct multiplié par le diviseur inverse, (§. 112.), redonne le dividende inverse. (§. 104)

§. 116. Donc, *dans toute division, quand*

le dividende et le diviseur ont le même signe, le quotient est direct. (§. 109. 115.)

2°. Le dividende et le diviseur ayant des signes contraires.

§. 117. Divisons à présent une quantité inverse par une quantité directe ; par exemple, — 12 par + 4.

Chercher combien de fois + 4 *est contenu dans* — 12, c'est chercher combien de fois la quantité directe 4 est contenue dans la quantité inverse 12.

Or, il est clair que le direct ne saurait être réellement contenu dans l'inverse.

Mais, s'il était permis de s'exprimer ainsi, on pourrait dire que le direct est contenu inversément dans l'inverse ; puisque le direct pris inversément devient inverse. (§. 41. 3°.)

Donc, dans ce sens, + 4 est contenu dans — 12 inversément trois fois, ou — 3 fois.

Et, en effet, $+4 \times -3 = -12$.

§. 118. Mais, dire que + 4 est contenu

inversément 3 fois dans — 12, c'est dire que + 4, pris à l'inverse, ou — 4, est contenu 3 fois dans — 12.

Ensorte que le quotient — 3 fait sentir ici que la question est mal présentée, et qu'on pourrait la rectifier en demandant *combien de fois* — 4 *est contenu dans* — 12.

Ce cas se rapporte donc, pour le sens de la question, à celui du §. 110; mais il ne s'y rapporte pas pour le résultat, qui est là direct, tandis qu'il est ici inverse.

C'est-à-dire qu'on ne peut répondre à la question actuelle par le résultat du §. 110; à moins qu'on ne rectifie auparavant cette question.

On sentira mieux encore le rapport des deux cas indiqués, en reprenant la preuve de la dernière opération; et en répétant le diviseur + 4 autant de fois qu'il est contenu dans le dividende — 12, c'est-à-dire, — 3 fois; car on aura alors : $+4 \times -3 = -4 -4 -4 = -12$. (§. 94.) [1].

---

(1) Faisons une application de ces principes, et

§. 119. *Diviser* — 12 *par* + 4, revient aussi à *chercher la quatrième partie de* — 12, (§. 106.) ou à diviser — 12 en + 4 parties égales, pour avoir la valeur d'une de ces parties.

Or, la quatrième partie de — 12 est évidemment — 3; puisque — 3 × + 4 = — 12.

Donc, dans ce cas, — 12 : + 4 = — 3.

§. 120. Donc, dans tous les cas, — 12 : + 4 = — 3. (§. 117. 119.)

§. 121. Et comme on aurait opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nom-

---

supposons qu'on nous demande *Combien* 12 *vers l'occident contient de fois* 4 *vers l'orient*. Nous répondrons : — 3 *fois*; ou, 3 *fois inversément*; et cela signifiera qu'il faut prendre 4 vers l'orient trois fois inversément, ou qu'il faut prendre trois fois l'inverse de 4 vers l'orient, ou, enfin, qu'il faut prendre trois fois 4 vers l'occident, pour faire 12 vers l'occident.

Ensorte que cette question a le même sens que celle-ci : *Combien* 12 *vers l'occident contient-il de fois* 4 *vers l'occident?* Mais on répond à cette dernière par *plus* 4; tandis qu'il faut répondre à la première par *moins* 4; si elle n'est auparavant rectifiée; et transformée dans la seconde.

bres qui auraient été dans le cas de ceux-ci, il en résulte qu'*une quantité inverse, divisée par une quantité directe, donne un quotient inverse.*

Ou, ce qui revient au même, que

$$- : + = -.$$

Et, en effet, le diviseur direct, multiplié par le quotient inverse, (§. 117), ou le quotient inverse multiplié par le diviseur direct, (§. 119.), redonne le dividende inverse. (§. 104.)

§. 122. Enfin, divisons une quantité directe par une quantité inverse; par exemple, + 12 par — 4.

Chercher combien de fois — 4 *est contenu dans* + 12, c'est chercher combien de fois la quantité inverse 4 est contenue dans la quantité directe 12.

Or, il est clair que l'inverse ne saurait être réellement contenu dans le direct.

Mais, s'il était permis de s'exprimer ainsi, on pourrait dire que l'inverse est contenu

inversément dans le direct; puisque l'inverse pris inversément devient direct. (§. 41. 4°.)

Donc, dans ce sens, — 4 est contenu dans + 12 inversément trois fois, ou — 3 fois.

Et, en effet, — 4 × — 3 = + 12.

§. 123. Mais, dire que — 4 est contenu *inversément* 3 fois dans + 12, c'est dire que — 4 pris à l'inverse, ou + 4, est contenu 3 fois dans + 12.

Ensorte que le quotient — 3 fait sentir ici que la question est mal présentée, et qu'on pourrait la rectifier, en demandant *combien de fois* + 4 *est contenu dans* + 12.

Ce cas se rapporte donc, pour le sens de la question, à celui du §. 107; mais il ne s'y rapporte pas pour le résultat, qui est là direct, tandis qu'il est ici inverse.

C'est-à-dire qu'on ne peut répondre à la question actuelle par le résultat du §. 107; à moins qu'on ne rectifie auparavant cette question.

On sentira mieux encore le rapport des

deux cas indiqués, en reprenant la preuve de la dernière opération ; et en répétant le diviseur — 4 autant de fois qu'il est contenu dans le dividende + 12, c'est-à-dire, — 3 fois ; car on aura alors : $-4 \times -3 = +4 +4 +4 = +12$. (§. 99.)

§. 124. Si l'on voulait diviser + 12 en 4 parties égales, pour avoir la valeur d'une de ces parties, qui serait manifestement + 3, ce serait alors $+12 : +4$; et ce cas a déja été examiné. (§. 108.)

§. 125. Mais, si l'on demandait de *diviser* + 12 *en* — 4 *parties égales*, (§. 106.) ; il serait clair que cette question serait mal présentée; et voici comment nous pourrions l'envisager.

Diviser + 12 *en* — 4 *parties égales*, c'est *diviser* 12 *direct dans un nombre inverse* 4 *de parties égales* ; ou bien c'est *chercher la quatrième partie inverse de* + 12.

Mais pour savoir quelle est *la quatrième partie inverse* d'une quantité, il importe de savoir d'abord quel est *le tout inverse* de cette

quantité ; car la quatrième partie inverse sera évidemment la quatrième partie du tout inverse.

Or, il est clair que *le tout inverse de* + 12, ou, en d'autres termes, que *l'inverse de* + 12, c'est — 12.

Donc, la quatrième partie inverse de + 12, sera la quatrième partie de — 12 ; c'est-à-dire, — 3.

Et, en effet, $-3 \times -4 = +12$.

§. 126. Ainsi donc, la division de + 12 par — 4 renferme deux cas, tous deux mal présentés.

Le premier a lieu quand on cherche combien — 4 est contenu de fois dans + 12. Nous avons vu ce qu'il fallait penser de ce cas-là. (§. 122. 123.)

Le second a lieu quand on demande de diviser + 12 en — 4 parties égales. Demander cela c'est, dans le vrai, demander de diviser — 12 en + 4 parties égales, pour avoir au quotient — 3. (§. 125.) ; ce qui

fait que ce cas revient exactement au cas bien présenté du §. 119.

§. 127. Donc, dans tous les cas, + 12 : — 4 = — 3. (§. 122. 125.)

§. 128. Et comme on aurait opéré et raisonné de la même manière avec d'autres nombres qui auraient été dans le cas de ceux-ci, il en résulte qu'*une quantité directe*, *divisée par une quantité inverse*, *donne un quotient inverse.*

Ou, ce qui revient au même, que

$$+ : - = -.$$

Et, en effet, le diviseur inverse, multiplié par le quotient inverse, (§. 122.), ou le quotient inverse, multiplié par le diviseur inverse, (§. 125.), redonne le dividende direct. (§. 104.)

§. 129. Donc, *dans toute division*, *quand le dividende et le diviseur ont le même signe*, *le quotient est direct;* (§. 116); *et quand le dividende et le diviseur ont des signes contraires*, *le quotient est inverse.* (§. 121. 128.)

§. 130. Observons ici que la division du *direct par le direct* renferme deux cas, tous DEUX BIEN présentés; (§. 107. 108.); que celle de *l'inverse par l'inverse*, en renferme UN BIEN présenté et UN MAL présenté; (§. 110. 112.); que celle de *l'inverse par le direct*, en renferme UN MAL présenté, et UN BIEN présenté; (§. 117. 119.); et enfin que celle du *direct par l'inverse*, en renferme deux, tous DEUX MAL présentés. (§. 122. 125.)

§. 131. La division comprend donc huit cas, dont quatre sont bien présentés, et quatre mal présentés; mais ces derniers se rapportent aux premiers.

Parmi les quatre cas mal présentés, il y en a deux qui donnent le même résultat que les cas bien présentés auxquels ils se rapportent. Ensorte que sans rectifier les questions qui donnent ces cas mal présentés, on peut y faire la même réponse qu'on ferait aux questions bien présentées dans lesquelles les premières rentrent. (§. 113. 126.)

En échange, les deux autres cas mal présentés donnent un résultat opposé, pour la direction, au résultat que fournissent les cas bien présentés auxquels ils se rapportent. Ensorte que la même quantité ne peut servir de réponse à la question bien présentée, et à la question mal présentée ; à moins qu'on ne rectifie celle-ci. (§. 118. 123.) (1)

§. 132. Voici quelques exemples de multiplications et de divisions.

Pour multiplier $+ 3 \frac{1}{2}$ par $+ 6$, écrivez : $+ 3 \frac{1}{2} \times + 6 = + 21$.

Pour multiplier $- 7 \frac{1}{4}$ par $+ \frac{1}{2}$, écrivez : $- 7 \frac{1}{4} \times + \frac{1}{2} = - 3 \frac{5}{8}$.

Pour multiplier $+ \frac{1}{2}$ par $- \frac{1}{2}$, écrivez : $+ \frac{1}{2} \times - \frac{1}{2} = - \frac{1}{4}$.

Pour multiplier $- 4{,}03$ par $- 2{,}5$, écrivez : $- 4{,}03 \times - 2{,}5 = + 10{,}075$.

§. 133. Pour diviser $+ 5$ par $+ 8$, écrivez : $+ 5 : + 8 = + \frac{5}{8}$.

---

(1) Voyez le quatrième tableau, à la fin de l'ouvrage.

Pour diviser $- \frac{3}{4}$ par $- \frac{2}{3}$, écrivez : $- \frac{3}{4} : - \frac{2}{3} = + 1 \frac{1}{8}$.

Pour diviser $- 2 \frac{1}{2}$ par $+ 2 \frac{1}{2}$, écrivez : $- 2 \frac{1}{2} : + 2 \frac{1}{2} = - 1$.

Pour diviser $+ 10{,}075$ par $- 2{,}5$, écrivez : $+ 10{,}075 : - 2{,}5 = - 4{,}03$.

CHAPITRE V.

Naissance des caractères généraux et de l'algèbre.

§. 134. On n'a point fait usage en arithmétique des caractères généraux, et des lettres de l'alphabet, avant d'avoir senti qu'il était possible d'employer de semblables caractères, et qu'il y aurait de l'avantage à le faire.

Nous allons voir comment on a pu être conduit à cette espèce de calcul, et, pour cela nous essayerons de résoudre quelques problèmes.

§. 135. Première question : *Vingt personnes, hommes et femmes, mangent dans une auberge ; l'écot d'un homme est de 8 décimes ; l'écot d'une femme est de 6 décimes ; et la dépense totale est de 130 décimes. On demande le nombre des hommes, et celui des femmes* (1).

(1) Algèbre d'Euler, §. 567.

A. Nous observerons, d'abord, que si le nombre des hommes était connu, celui des femmes le serait aussi; puisqu'il est dit qu'il y a en tout 20 personnes.

B. Ainsi donc, comme nous avons appelé *x*, dans l'arithmétique, le terme inconnu d'une proportion, nous appellerons ici *x* le nombre inconnu des hommes.

C. En retranchant le nombre des hommes du nombre total, nous aurons le nombre des femmes, qui sera, par conséquent, représenté par $20 - x$.

D. Maintenant, l'écot d'un homme étant de 8 décimes, s'il y a avait 4 hommes, l'écot de tous les hommes serait de 8 décimes multipliées par 4; ou, ce qui reviendrait au même, il serait de 4 décimes multipliées par 8; ce qui ferait toujours 32 décimes.

E. Mais le nombre des hommes est *x*, et, par conséquent, l'écot de tous les hommes est de *x* fois 8 décimes; ou, ce qui revient au même, il est de 8 fois *x* décimes. (§. 135. D.)

Et comme la quantité 8 fois x peut évidemment être représentée par $8x$, on aura l'écot de tous les hommes égal à $8x$ décimes.

F. De même, le nombre des femmes étant représenté par $20 - x$, (§. 135. C.), et la dépense de chacune étant de 6 décimes, l'écot de toutes les femmes sera égal à 6 décimes multipliées par $20 - x$, nombre abstrait; ou, ce qui revient au même, cet écot sera égal à $20 - x$ décimes, multipliées par 6, nombre abstrait. (§. 135. D.)

Voyons donc comment on peut multiplier $20 - x$ par 6.

Si, au lieu de $20 - x$, nous avions le nombre 20, tout entier, à multiplier par 6, il est clair que le produit serait 6 fois 20, ou 120.

Mais, ce produit est trop grand, parce que le multiplicande devait, avant l'opération, être diminué de x.

Ayant donc pris 6 fois le nombre 20, tout entier, nous avons pris 6 fois x de trop.

Il n'y a donc, pour corriger l'erreur, qu'à retrancher 6 fois x, ou $6x$, de 120; et nous aurons alors : $120 - 6x$ pour le produit de $20 - x$ par 6.

Et, par conséquent, l'écot de toutes les femmes sera égal à 120 décimes — $6x$ décimes; ou, ce qui revient au même, à $120 - 6x$ décimes.

G. La dépense des hommes, (§. 135. E.), jointe à celle des femmes, (§. 135. F.), sera donc de $8x$ décimes plus $120 - 6x$ décimes; ce que l'on pourra écrire ainsi : $8x + 120 - 6x$.

H. Mais, la dépense des hommes, jointe à celle des femmes, fait la dépense totale; et nous savons d'ailleurs que cette dépense totale est de 130 décimes.

Nous avons donc deux expressions pour la dépense totale; et ces deux expressions ne pouvant appartenir qu'à un seul et même nombre, il est clair qu'elles ont la même valeur. Ainsi

$$8x + 120 - 6x = 130.$$

Voilà ce qu'on appelle l'ÉQUATION du problème, du mot latin *æquare*, qui signifie *égaler*.

Les quantités séparées par les signes + et —, se nomment les TERMES de l'équation. Tous ceux qui précédent le signe d'égalité forment ensemble ce qu'on appelle LE PREMIER MEMBRE de l'équation, et ceux qui le suivent forment LE SECOND MEMBRE.

J. Pour réduire le premier membre à sa plus simple expression, il faudrait retrancher $6x$ de 120, et joindre le reste avec $8x$.

Mais, il est clair qu'on obtiendra le même résultat en retranchant $6x$ de $8x$, et en ajoutant le reste avec 120.

Or, la différence de $8x$ et de $6x$ est manifestement $2x$; ce qui fait que notre première équation se change en celle-ci :

$$2x + 120 = 130.$$

K. Maintenant, nous approchons du but; car s'il faut ajouter 120 à $2x$ pour faire 130, en n'ajoutant rien à $2x$ on n'aura

que 130 — 120, ou 10, pour la valeur de $2x$.

Nous aurons donc ainsi une troisième et une quatrième équation, qui seront :

$$2x = 130 - 120.$$
$$2x = 10.$$

L. Or, puisque $2x$ valent 10, il est manifeste qu'un seul x vaut 5 ; ce que l'on trouvera en divisant par 2 chacun des membres de la dernière égalité.

Afin de représenter cette opération finale, on écrira :

$$x = \frac{10}{2} \text{ (1)}.$$
$$x = 5.$$

M. Comme tout a été réduit en décimes,

---

(1) On a vu, dans l'arithmétique, qu'il était indifférent, pour indiquer une division, d'écrire le diviseur à la suite du dividende, en les séparant par deux points, ou d'écrire le diviseur sous le dividende, en les séparant par un trait.

Ainsi $10 : 2 = \frac{10}{2}$.

ceci signifie, proprement, que x décimes égalent 5 décimes.

Mais il est clair que si l'on a la quantité x décimes égale à 5 décimes, on aura aussi la quantité x hommes égale à 5 hommes.

N. Il y a donc, dans l'auberge, 5 hommes, et, par conséquent, 15 femmes.

Les 5 hommes dépensent 5 fois 8 décimes, ou 40 décimes; et les 15 femmes dépensent 15 fois 6 décimes, ou 90 décimes; ce qui fait bien 130 décimes pour la dépense totale.

§. 136. Rapprochons maintenant nos différentes opérations, pour en saisir mieux la suite. Nous avons d'abord eu :

Le nombre des hommes .	x
Celui des femmes	$20 - x$.
La dépense des hommes .	$8\ x$.
Celle des femmes	$120 - 6\ x$.

Nous avons alors formé successivement les équations suivantes; qui nous ont conduit à la valeur de x.

$$8x + 120 - 6x = 130.$$
$$2x + 120 = 130.$$
$$2x = 130 - 120.$$
$$2x = 10.$$
$$x = \frac{10}{2}.$$
$$x = 5.$$

§. 137. Tout ceci n'est pas encore de l'algèbre ; car on ne voit là qu'un caractère étranger au calcul arithmétique ; et les opérations que nous avons faites, pour connaître la valeur de ce caractère, ne sont que de simples opérations en chiffres.

Il faut, avant d'arriver à notre but, résoudre encore quelques problèmes analogues à celui-là.

§. 138. SECONDE QUESTION : *Douze personnes, hommes et femmes, mangent dans une auberge ; l'écot d'un homme est de 60 décimes ; l'écot d'une femme est de 50 décimes ; et la dépense totale est de 660 décimes. On demande le nombre des hommes et celui des femmes.*

Cette question ne diffère de la précédente

que par les nombres. Nous suivrons donc, pour la résoudre, la marche que nous avons suivie pour résoudre la première; et nous aurons :

Le nombre des hommes . x.
Le nombre des femmes . $12 - x$.
La dépense des hommes . $60\,x$.
La dépense des femmes . $600 - 50\,x$.

Cela nous donnera les équations suivantes, qui nous conduiront à la valeur de x.

$$60\,x + 600 - 50\,x = 660.$$
$$10\,x + 600 = 660.$$
$$10\,x = 660 - 600.$$
$$10\,x = 60.$$
$$x = \tfrac{60}{10}.$$
$$x = 6.$$

Il y a donc 6 hommes, et, par conséquent, 6 femmes.

Les hommes dépensent 6 fois 60 décimes, ou 360 décimes; et les femmes 6 fois 50

décimes, ou 300 décimes; ce qui fait bien 660 décimes pour la dépense totale.

§. 139. TROISIÈME QUESTION : *Trente deux ouvriers, français et espagnols, travaillent ensemble à un même ouvrage; on donne 20 décimes par jour à chaque français, et 15 à chaque espagnol; et la dépense journalière est de 540 décimes. On demande le nombre des ouvriers français et celui des espagnols.*

Cette question, quoique différente, pour le fond, des deux précédentes, a cependant avec elles un si grand rapport que nous suivrons encore, pour la résoudre, la marche que nous avons suivie pour résoudre les autres. Nous aurons donc :

Le nombre des ouvriers français	x.
Celui des espagnols . . .	$32 - x$.
La journée de tous les français	$20\ x$.
Celle de tous les espagnols	$480 - 15\ x$.

Ce qui nous donnera les équations suivantes :

$$20\,x + 480 - 15\,x = 540.$$
$$5\,x + 480 = 540.$$
$$5\,x = 540 - 480.$$
$$5\,x = 60.$$
$$x = \tfrac{60}{5}.$$
$$x = 12.$$

Il y a donc 12 français, et, par conséquent, 20 espagnols.

La journée de tous les français est de 12 fois 20 décimes, ou de 240 décimes ; et la journée de tous les espagnols est de 20 fois 15 décimes, ou de 300 décimes ; ce qui fait bien 540 décimes, pour la dépense totale.

§. 140. QUATRIÈME QUESTION : *Huit tuyaux de fontaine, les uns de fer, les autres de fonte, coulent ensemble dans un même réservoir ; chaque tuyau de fer donne 12 hectolitres d'eau, pendant que chaque tuyau de fonte en fournit 10 ; alors le réservoir est*

plein, et contient 86 hectolitres. On demande le nombre des tuyaux de fer, et celui des tuyaux de fonte.

Encore ici la question varie; et cependant elle a, avec les autres, un rapport qu'il sera facile d'appercevoir, sans que je m'y arrête, et qui nous obligera de suivre, pour la quatrième fois, la marche que nous avons suivie. Nous aurons donc :

Le nombre des tuyaux de fer x.

Celui des tuyaux de fonte . . $8 - x$.

La dépense de tous les tuyaux de fer, pendant que le réservoir se remplit, exprimée en hectolitres . . . . $12\,x$.

Celle des tuyaux de fonte . . $80 - 10\,x$.

Ce qui donnera :

$$12\,x + 80 - 10\,x = 86.$$
$$2\,x + 80 = 86$$
$$2\,x = 86 - 80.$$
$$2\,x = 6.$$
$$x = \tfrac{6}{2}.$$
$$x = 3.$$

Il y a donc 3 tuyaux de fer, et, par conséquent, 5 tuyaux de fonte.

Tous les tuyaux de fer donnent donc 36 hectolitres d'eau, pendant que les tuyaux de fonte en fournissent 50. Alors le réservoir est plein, et contient, en effet, 86 hectolitres d'eau.

§. 141. Si nous réfléchissons maintenant sur ce qu'il nous a fallu faire pour résoudre nos quatre questions, nous verrons que nous avons été forcés de répéter un même calcul quatre fois de suite : du moins la marche des quatre opérations s'est-elle toujours trouvée la même; et cela à cause du rapport qu'il y avait entre les problèmes qu'il fallait résoudre. Ces opérations n'ont absolument différé entr'elles que par les nombres, qui ont, en effet, varié d'une question à l'autre.

Cela bien saisi nous fera penser que la solution du premier problème aurait pu nous conduire à la solution des autres, si dans les différentes égalités successives par lesquelles nous avons passé pour arriver au résultat

final de celui-là, nous n'eussions fait qu'indiquer les opérations, au lieu de les effectuer; car alors les calculs à faire pour résoudre chacun de ces problèmes auraient paru dans le résultat du premier; et ils auraient été réduits là au plus petit nombre possible.

En reprenant notre première question, (§. 135.), j'expliquerai plus clairement mon idée.

§. 142. Nous avons d'abord représenté le nombre des hommes par x, (§. 135. B.). Alors celui des femmes a eu pour expression : $20 - x$; (§. 135. C.); et la dépense de tous les hommes : $8x$. (§. 135. E.)

A. Pour désigner celle de toutes les femmes, nous avons multiplié $20 - x$ par 6; (§. 135. F.); ce qui nous a donné $120 - 6x$.

Maintenant, au lieu de faire cette multiplication, je me bornerai à l'indiquer, afin qu'elle paraisse dans le résultat final. J'aurai donc, pour la dépense de toutes les femmes,

$20 \times 6 - 6x$; ou, ce qui revient au même, $6 \times 20 - 6x$.

B. En réunissant alors les deux dépenses, j'aurai l'équation :

$$8x + 6 \times 20 - 6x = 130.$$

C. Parvenu là, je devrais retrancher $6x$ de $8x$; mais, au lieu de faire cette soustraction, je me contenterai de l'indiquer ; et je la représenterai par $8x - 6x$; ou par $(8 - 6)x$.

On doit très-bien comprendre le sens de cette dernière expression : elle montre que le nombre 6 doit être retranché du nombre 8, et que le reste 2 de cette soustraction doit être écrit devant la lettre x, comme son multiplicateur. Cette expression a donc pour valeur $2x$, comme il faut que cela soit.

Les parenthèses ont là leur utilité, car si on les ôtait, et qu'à la place de $8x - 6x$ on voulut écrire $8 - 6x$, sans parenthèses, cela signifierait alors que la quantité $6x$ doit être retranchée du nombre 8, ce qui aurait

une tout autre valeur ; comme il est facile de le voir.

Notre première équation se changera donc en celle-ci :

$$(8-6)\,x + 6 \times 20 = 130.$$

D. D'où nous tirerons, (§. 135. K.) :

$$(8-6)\,x = 130 - 6 \times 20.$$

E. Mais, l'inconnue x étant ici multipliée par $8-6$, nous diviserons les deux membres de l'équation par $8-6$, et nous aurons enfin :

$$x = \frac{130 - 6 \times 20}{8-6} \quad (*)$$

(*) Il faut faire ici plusieurs observations.

D'abord il est clair que quand deux quantités sont égales, si on les divise par un même nombre les quotients sont égaux.

Il n'est pas moins évident que lorsqu'on divise un produit par un de ses facteurs, on a pour quotient l'autre facteur. Ainsi en divisant le produit $(8-6)\,x$ par le facteur $(8-6)$, on a pour quotient l'autre facteur x.

Enfin, comme il est permis, pour indiquer une di-

Résultat final qui donne toujours 5 pour la valeur de x ; mais qui a l'avantage de montrer les opérations qu'il faut nécessairement faire pour trouver cette valeur.

§. 143. En considérant ce dernier résultat, nous observerons que le nombre 130 représente là la dépense totale, le nombre 6 l'écot d'une femme, le nombre 20 toutes les personnes, et le nombre 8 l'écot d'un homme.

§. 144. Ensorte que, *pour trouver la valeur de* x, *il faut multiplier le nombre des personnes par l'écot d'une femme, retrancher ce produit de la dépense totale, et diviser le reste par la différence de l'écot d'un homme avec celui d'une femme.*

§. 145. Appliquant cela à nos autres questions, nous aurons, tout d'un coup, sans mettre ces questions en équation, et sans passer par les détails intermédiaires :

---

vision d'écrire le diviseur sous le dividende, en les séparant par un trait, (§. 135. note.), nous pouvons, représenter comme nous l'avons fait la division du second membre de notre dernière équation par 8 — 6.

Pour

Pour la seconde, (§. 138.):

$$x = \frac{660 - 50 \times 12}{60 - 50} = 6.$$

Pour la troisième, (§. 139.):

$$x = \frac{540 - 15 \times 32}{20 - 15} = 12.$$

Pour la quatrième, (§. 140.):

$$x = \frac{86 - 10 \times 8}{12 - 10} = 3.$$

§. 146. On comprendra donc, par cet exemple, comment la solution d'un problème peut conduire à la solution d'une foule d'autres problèmes analogues au premier.

Il faut pour cela, quand on résout le problème original, ne pas effectuer les opérations qui se présentent à faire, et se contenter de les indiquer dans les différentes égalités successives par lesquelles on passe. (§. 141.)

§. 147. Mais ce n'est pas tout : pour aller plus facilement de la solution de notre premier

problème à la solution des autres, nous avons déduit de cette première solution une espèce de règle que nous avons énoncée au §. 144.

Or, il est facile de voir que cette règle serait abrégée, simplifiée, qu'elle deviendrait, du moins, plus saillante, et se lirait, en quelque sorte, d'un coup-d'œil, si on lui donnait la forme suivante :

$$x = \frac{\text{Dép. tot.} - \text{L'écot d'une fem.} \times \text{Le nomb. des pers.}}{\text{L'écot d'un hom.} - \text{L'écot d'une fem.}}$$

§. 148. D'ailleurs on sentira facilement l'avantage, soit de l'énoncé du §. 144, soit de la *formule* dans laquelle nous venons de le changer ; car, dans l'un et dans l'autre, les mots *Dépense totale*, par exemple, ne signifient pas plus 130 que 660, que 540, que 86 ; (§. 145.) : la valeur de ces mots dépend de la question ; et il en est de même des autres mots employés dans l'énoncé et dans la formule. Ensorte que cet énoncé et cette formule peuvent s'appliquer à tous les problèmes analogues au problème original.

Pour résoudre ces problèmes, il faudra

substituer aux mots de l'énoncé ou de la formule les nombres qu'ils sont destinés à représenter dans chaque question particulière.

§. 149. Mais un premier pas conduit à un second; et nous ne tarderons pas de voir que notre formule peut se simplifier beaucoup encore; car, au lieu d'écrire : *Dép. tot.* on pourrait se contenter d'écrire : *d. t.* et même, tout simplement : *d*, en ne mettant que la première lettre du mot dépense; et cela n'aura pas d'inconvénient si nous n'oublions pas quelle est la signification de ce *d*.

En partant de là, nous pourrons représenter l'écot d'un homme par *h*, première lettre du mot homme; l'écot d'une femme par *f*, première lettre du mot femme; et enfin le nombre des personnes par *n*, première lettre du mot nombre.

Notre formule prendra alors cette forme très-simple :

$$x = \frac{d - f \times n}{h - f.}$$

Et de cette manière, nous en saisirons bien mieux l'ensemble, nous y lirons plus facilement les opérations à faire pour résoudre tous les problèmes analogues au problème original.

§. 150. D'ailleurs il est bien clair qu'au lieu de ces lettres nous aurions pu en mettre d'autres, en convenant d'avance de ce que nous voulions leur faire représenter.

Ainsi l'écot d'un homme aurait tout aussi bien pu être exprimé par *a* que par *h*; l'écot d'une femme par *b* que par *f*; et ainsi de suite.

§. 151. Il n'est pas moins évident que puisque nous avons trouvé une formule qui peut résoudre nos quatre questions, et bien d'autres encore, qu'il serait facile d'imaginer, et que, dans cette formule, les différentes quantités sont représentées par des lettres, on aurait pu nous proposer une question dans laquelle les quantités auraient été *immédiatement* représentées par des lettres. Et sans doute que de la question, ainsi présentée, nous

aurions pu descendre à la formule. C'est ce que nous allons essayer de faire.

§. 152. QUESTION GÉNÉRALE : *Un certain nombre connu de personnes, hommes et femmes, mangent dans une auberge; et ce nombre est représenté par* n *; l'écot d'un homme est de* a *décimes ; l'écot d'une femme est de* b *décimes; et la dépense totale est de* d *décimes. On demande le nombre des hommes et celui des femmes.*

Nous avons :

Le nombre des personnes. . . . . n.
L'écot d'un homme. . . . . a.
L'écot d'une femme. . . . . b.
La dépense totale. . . . . d.

Nous ferons le nombre des hommes . x.
Celui des femmes, égal au nombre total moins le nombre des hommes, sera, par conséquent, ... $n - x$.

La dépense de tous les hommes est égale à a décimes multipliées par le nombre abs-

trait x; ou, ce qui revient au même, elle est égale à x décimes multipliées par le nombre abstrait a.

Mais pour multiplier x par 8, nous avons écrit $8x$; et, par conséquent, pour multiplier x par a, nous pourrons écrire ax; en convenant que quand deux lettres seront ainsi écrites l'une à côté de l'autre, sans aucun signe entre deux, les nombres qu'elles représentent devront être multipliés l'un par l'autre.

La dépense de tous les hommes sera donc. ax.

Pour avoir la dépense de toutes les femmes, il faudra multiplier l'écot d'une femme, ou b décimes, par un nombre abstrait égal au nombre des femmes, ou par $n - x$. Ou, ce qui revient au même, il faudra multiplier $n - x$ décimes par b nombre abstrait. Il est clair que cela nous donnera, d'après ce que nous avons vu précédemment, (§. 135. F. 142. A.), $bn - bx$.

Ainsi la dépense de toutes les femmes

sera . . . . $bn - bx$.

Nous aurons donc alors cette équation, (§. 142. B.) :

$$ax + bn - bx = d.$$

D'où nous tirerons d'abord, (§. 142. C.) :

$$(a - b)\,x + bn = d.$$

Et ensuite, (§. 142. D.) :

$$(a - b)\,x = d - bn.$$

Divisant enfin de part et d'autre par $a - b$, (§. 142. E.), nous trouverons :

$$x = \frac{d - bn}{a - b}$$

Formule qui ne diffère de la précédente que par les lettres que nous avons substituées à b et à f. (§. 149.)

§. 153. Voilà ce que c'est que l'ALGÈBRE (1) : c'est une arithmétique qui sert à ré-

---

(1) *Algèbre*, du mot arabe GEBR, avec l'article AL. Le *Gebr*, ç'est-à-dire, ce qui est difficile à entendre;

soudre des questions générales au moyen de signes généraux.

On a choisi pour ce calcul les lettres de l'alphabet, qui n'ayant, par elles-mêmes, aucune valeur numérique, sont, comme nous venons de le voir, susceptibles de représenter toutes sortes de quantités.

Lorsqu'au moyen de ces signes généraux on a résolu une question générale, la formule, qui en est le résultat, mène, en quelque sorte, tout d'un coup à la solution de toutes les questions particulières qu'on peut concevoir renfermées dans la question générale. Il ne s'agit, pour cela, que de substi-

---

langage inintelligible, ou non entendu; au même sens que l'on dit communément : *c'est de l'algèbre.*

Le mot GEBR, GABR fut appliqué aux *Guèbres*, parce qu'ils priaient en marmotant; et de là on a appelé *Guebrique* tout langage inintelligible. Ce mot est usité dans le ci-devant Languedoc, et répond au *Gibberisch* des anglais. Il convenait surtout au langage guttural, plus abondant en sons *ga*, *ge*, *gab*, *gebr*, dans lesquels le gosier joue le plus grand rôle. (Le prof. CHAVANNES.)

tuer aux caractères généraux de la formule les valeurs numériques particulières qui leur sont attribuées par la question particulière, et d'effectuer les opérations, qui ne sont, au fond, qu'indiquées dans la formule, quoiqu'elles y soient réduites au plus petit nombre possible.

C'est là, sans doute, un avantage de l'algèbre. Elle en a d'autres encore, que je pourrais peut-être indiquer dès à présent à mes lecteurs ; mais ce qu'ils viennent de voir suffira, non-seulement pour leur faire comprendre comment on peut calculer avec des lettres ; mais encore pour leur donner l'envie d'en connaître mieux la manière. Et c'est tout ce qu'il faut pour aller en avant ; car les inventeurs de l'algèbre ne purent point non plus apprécier d'entrée toute l'utilité de l'édifice dont ils jetaient les fondemens.

FIN.

Lausanne, le 8 Janvier 1799.

TABLE DES MATIÈRES.

ARITHMÉTIQUE DES QUANTITÉS DIRECTES ET INVERSES.

ses les unes pour les autres, indépendamment même de toute question rélative à ces quantités.

Il existe des quantités qui, étant contraires ou opposées, ne peuvent sans quelqu'artifice particulier être prises les unes pour les autres, à moins que ce ne soit pour résoudre certaines questions susceptibles de rectification. . . . . §. 15. à 19.

Ce que c'est que les quantités directes et les quantités inverses. . . . §. 20 à 23.

La combinaison d'une quantité directe avec une quantité directe est une addition. . . . . §. 24 à 26.

La combinaison d'une quantité inverse avec une quantité directe égale ou plus grande, est une soustraction opérée par la quantité inverse. . . . . . §. 27 à 30.

Emploi des signes + et — pour désigner les quantités directes et inverses. §. 31.

Les quantités directes ont été nommées positives et les inverses négatives. . §. 32.

Ces quantités sont aussi réelles les unes que les autres, et les inverses ne sont point au dessous de zéro. . . . . §. 33.

Les signes + et — ont un usage double. . . . . §. 35.

On ne peut vraiment additionner et soustraire que des quantités homogènes et semblables, et, en outre, on ne peut soustraire d'une quantité quelconque qu'une quantité plus petite.

Toutes les opérations qui sont présen-

Naissance de l'Algèbre.

A la fin de l'ouvrage se trouvent quatre tableaux rélatifs à l'addition, à la soustraction, à la multiplication et à la division.

Fin de la table.

AVIS AU RELIEUR.

Il faut placer les quatre tableaux à la fin de l'ouvrage, et les plier en forme de planches, en leur laissant du papier blanc ; de manière qu'étant étendus ils sortent tout-à-fait du livre.

PREMIER TABLEAU.

VÉRITABLE ADDITION.

Cas bien présentés.

A. Le direct avec le direct.

B. L'inverse avec l'inverse.

Cas mal présentés.

1°. Soustraire l'inverse du direct,

SIGNIFIE

Ajouter le direct avec le direct. (A)
(§. 75.)

2°. Soustraire le direct de l'inverse,

SIGNIFIE

Ajouter l'inverse avec l'inverse. (B)
(§. 77.)

SECOND TABLEAU.

VÉRITABLE SOUSTRACTION.

Cas bien présentés.

A. LE DIRECT PLUS PETIT DU DIRECT PLUS GRAND.

B. L'INVERSE PLUS PETIT DE L'INVERSE PLUS GRAND.

Cas mal présentés.

1°. Soustraire l'inverse plus grand de l'inverse plus petit ; *et*

2°. Ajouter le direct plus grand avec l'inverse plus petit ;

SIGNIFIE

Soustraire le direct plus petit du direct plus grand. (A) (§. 65. 69.)

3°. Soustraire le direct plus grand du direct plus petit ; *et*

4°. Ajouter l'inverse plus grand avec le direct plus petit ;

SIGNIFIE

Soustraire l'inverse plus petit de l'inverse plus grand. (B) (§. 63. 71.)

TROISIÈME TABLEAU.

VÉRITABLE MULTIPLICATION.

Cas bien présentés.

A. Le direct pris directement.

B. L'inverse pris directement.

Cas mal présentés.

1°. L'inverse pris inversément;

C'EST

Le direct pris directement. (A)
(§. 99.)

2°. Le direct pris inversément;

C'EST

L'inverse pris directement. (B)
(§. 95.)

QUATRIÈME TABLEAU.

				Cas bien ou mal présentés.	
VÉRITABLE DIVISION.	Le dividende et le diviseur ayant le même signe ; QUOTIENT DIRECT.	*Le direct par le direct.*	Le direct en parties égales et directes, pour trouver le nombre de ces parties, qui doit être direct. (§. 107.)	BIEN. (N°. 1.)	
			Le direct dans un nombre direct de parties égales, pour trouver la valeur d'une partie, qui doit être directe. (§. 108.)	BIEN. (N°. 2.)	
		L'inverse par l'inverse.	L'inverse en parties égales et inverses, pour trouver le nombre de ces parties, qui doit être direct. (§. 110.)	BIEN. (N°. 3.)	
			L'inverse dans un nombre inverse de parties égales, pour trouver la valeur d'une partie, qui doit être directe. (§. 112.)	MAL. (A)	Ce cas se rapporte, pour le sens de la question, à celui du N°. 2; et donne également un résultat direct. (§. 113.)
	Le dividende et le diviseur ayant des signes contraires; QUOTIENT INVERSE.	*L'inverse par le direct.*	L'inverse en parties égales et directes, pour trouver le nombre de ces parties, qui doit être inverse. (§. 117.)	MAL. (B)	Ce cas se rapporte, pour le sens de la question, à celui du N°. 3; mais il ne donne pas le même résultat; ensorte qu'on ne peut répondre à la question actuelle par le résultat du N°. 3; à moins qu'on ne rectifie auparavant cette question. (§. 118.)
			L'inverse dans un nombre direct de parties égales, pour trouver la valeur d'une partie, qui doit être inverse. (§. 119.).	BIEN. (N°. 4.) . .	
		Le direct par l'inverse.	Le direct en parties égales et inverses, pour trouver le nombre de ces parties, qui doit être inverse. (§. 122.)	MAL. (C)	Ce cas se rapporte, pour le sens de la question, à celui du N°. 1; mais il ne donne pas le même résultat; ensorte qu'on ne peut répondre à la question actuelle par le résultat du N°. 1; à moins qu'on ne rectifie auparavant cette question. (§. 123.)
			Le direct dans un nombre inverse de parties égales, pour trouver la valeur d'une partie, qui doit être inverse. (§. 125.)	MAL. (D)	Ce cas se rapporte, pour le sens de la question, à celui du N°. 4; et donne également un résultat inverse. (§. 126.)

inches centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Density ⟶

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams



